反射テスト　解析　中間値の定理　01

1.　$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ は $-2 < x < -1$ の間に少なくとも 1 つの解をもつことを示せ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

2. $x^x = 2x$ は $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$ の間に少なくとも 1 つの解をもつことを示せ.

(S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

反射テスト　解析　中間値の定理　01　解答解説

1.　$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ は $-2 < x < -1$ の間に少なくとも 1 つの解をもつことを示せ.

（ S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

★ 中間値の定理

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において連続であるとき,

$f(a) < f(b)$ ならば $f(a) < \mu < f(b)$ となる任意のμに対し, $f(c) = \mu$ となる点 c が存在する.

☆問のように, 解けない（解きにくい）方程式において, ある範囲内に実数解があることを示す場合に使う.
☆関数が **連続** であることがとても重要である.

証明

$f(x) =$ 左辺 とする.

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 1 = -8 - 4 + 4 + 1 = -7 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 2(-1) + 1 = -1 - 1 + 2 + 1 = 1 > 0$$

これらの結果から,　$f(-2) < 0 < f(-1)$

また $f(x)$ は $-2 \leqq x \leqq -1$ において連続である.

以上の条件から, 中間値の定理より, $f(c) = 0$ かつ $-2 < c < -1$ を満たす c が存在する.

$\therefore$　$f(x) = 0$ は $x = c$ を解にもつから, $-2 < x < -1$ の間に少なくとも 1 つは解をもつ.

2. $x^x = 2x$ は $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$ の間に少なくとも 1 つの解をもつことを示せ.

(S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

証明

$f(x) =$ 左辺 $-$ 右辺 とする.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{2}{3} = \frac{3 - 2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} \quad \cdots ①$$

①の正負を調べる. 3 と $2\sqrt[3]{3}$ の大小だから,

$$3^3 - \left(2\sqrt[3]{3}\right)^3 = 27 - 8 \times 3 = 3 > 0$$

$\therefore \quad 3 > 2\sqrt[3]{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2\sqrt{3} > 0$ 　　①から $f\left(\dfrac{1}{3}\right) > 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0$$

これらの結果から, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{3}\right)$

また $f(x)$ は $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において連続である.

以上の条件から, 中間値の定理より, $f(c) = 0$ かつ $\dfrac{1}{3} < c < \dfrac{1}{2}$ を満たす c が存在する.

$\therefore \quad f(x) = 0$ は $x = c$ を解にもつから, $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$ の間に少なくとも 1 つは解をもつ.