

反射テスト 解析 微分可能性 01

1. 次の $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能か答えよ. 結果のみでよい. (S 級 20 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ 2x & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & (x < 0) \\ x^2 + 2 & (0 \leq x) \end{cases}$$

2. 次の $f(x)$ は $x = 1$ で微分可能であるように a, b の値を求めよ. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 4 分)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & (x < 1) \\ ax^2 + bx & (1 \leq x) \end{cases}$$

3. 次の $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能か答えよ. 結果のみでよい. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $f(x) = |x|$

(2) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & (x < 0) \\ (x + 1)^3 & (0 \leq x) \end{cases}$

4. 次の $f(x)$ は $x = 2$ で微分可能であるように a, b の値を求めよ. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 4 分)

$$f(x) = \begin{cases} -x - 6 & (x \leq 2) \\ ax^2 + bx - 8 & (2 < x) \end{cases}$$

反射テスト 解析 微分可能性 01 解答解説

1. 次の $f(x)$ は $x=0$ で微分可能か答えよ. 結果のみでよい. (S級 20 秒, A級 1 分, B級 2 分, C級 3 分)

★「微分可能」⇔「グラフがなめらか」

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 ⇔ 連続で, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在する.

☆左右の極限が一致することでもある.

★連続 (グラフがつながっていること)

$f(x)$ が $x=a$ で連続 ⇔ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し, $f(a)$ と一致する.

☆左右の極限が一致することでもある.

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ 2x & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 0$$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で連続である.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x - (-0)}{x - (-0)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x - 2 \cdot (+0)}{x - (+0)} = 2$$

極限値が異なるので, **微分不可能** …答え

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & (x < 0) \\ x^2 + 2 & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 2$$

ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で連続である.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{(-x^2 + 2) - \{ -(-0)^2 + 2 \}}{x - (-0)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(x^2 + 2) - \{ (+0)^2 + 2 \}}{x - (+0)} = 0$$

極限値が等しいので, **微分可能** …答え

2. 次の $f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるように a, b の値を求めよ. (S級 30 秒, A級 1 分, B級 2 分, C級 4 分)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & (x < 1) \\ ax^2 + bx & (1 \leq x) \end{cases}$$

$$x=1 \text{ で連続であるから, } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\text{ゆえに } a + b = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x - 2) - (1 - 2)}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(ax^2 + bx) - (a \cdot 1^2 + b \cdot 1)}{x - 1} = 2a + b$$

$$\text{極限値が等しいので, } 2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \Leftrightarrow (a, b) = (2, -3) \quad \cdots \text{答え}$$

3. 次の $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能か答えよ. 結果のみでよい. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x & (0 \leq x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 0$$

ゆえに $f(x)$ は $x = 0$ で連続である.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x - (-0)}{x - (-0)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - (+0)}{x - (+0)} = 1$$

極限值が異なるので, **微分不可能** …答え

(2) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & (x < 0) \\ (x + 1)^3 & (0 \leq x) \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 1$$

ゆえに $f(x)$ は $x = 0$ で連続である.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{3x + 1 - \{3 \cdot (-0) + 1\}}{x - (-0)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(x + 1)^3 - \{(+0) + 1\}^3}{x - (+0)} = 3$$

極限值が等しいので, **微分可能** …答え

4. 次の $f(x)$ は $x = 2$ で微分可能であるように a, b の値を求めよ. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 2 分, C 級 4 分)

$$f(x) = \begin{cases} -x - 6 & (x \leq 2) \\ ax^2 + bx - 8 & (2 < x) \end{cases}$$

$$x = 2 \text{ で連続であるから, } \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = f(2)$$

$$\text{ゆえに } 4a + 2b - 8 = -8 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(-x - 6) - (-2 - 6)}{x - 2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(ax^2 + bx + 10) - (a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + b + 10)}{x - 2} = 4a + b$$

$$\text{極限值が等しいので, } 4a + b = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad \cdots \text{答え}$$