反射テスト　解析　連続性　求値　01

1.　$f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で連続であるように a, b の値を定めよ. ただし無理な場合は単に×でよい.

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$f(x) = \begin{cases} 4 & (\, x \leqq -2 \,) \\ ax + b & (\, -2 < x \leqq 1 \,) \\ 1 & (\, 1 < x \,) \end{cases}$

(2)　$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & (\, x < 0 \,) \\ a & (\, 0 \leqq x \leqq 3 \,) \\ bx - 3b & (\, 3 < x \,) \end{cases}$

(3)　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (\, x \neq 1 \,) \\ a & (\, x = 1 \,) \end{cases}$

(4)　$f(x) = \begin{cases} x + a & (\, x \leqq 0 \,) \\ 2^{-\frac{1}{x}} & (\, 0 < x \,) \end{cases}$

2. $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で連続であるように a, b の値を定めよ. ただし無理な場合は単に×でよい.

(S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

(1) $f(x) = \begin{cases} -7 & (x \leqq -3) \\ ax+b & (-3 < x \leqq 2) \\ 3 & (2 < x) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} -x^2+a & (x < -1) \\ 1 & (-1 \leqq x \leqq 3) \\ bx+2 & (3 < x) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x(x-1)} & (x \neq 0 \text{ かつ } x \neq 1) \\ a & (x = 0) \\ b & (x = 1) \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} & (x < 0) \\ x+a & (0 \leqq x) \end{cases}$

反射テスト　解析　連続性　求値　01　解答解説

1. $f(x)$ が区間 $(-\infty,\infty)$ で連続であるように a,b の値を定めよ．ただし無理な場合は単に×でよい．

（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分）

★区間 $\begin{cases} \text{閉区間}\ [\alpha,\beta] & \text{「}\alpha\text{以上}\beta\text{以下の範囲」を表す．} \\ \text{開区間}\ (\alpha,\beta) & \text{「}\alpha\text{より大きく}\beta\text{より小さい範囲」を表す．} \end{cases}$

よって，区間 $(-\infty,\infty)$ とは x が実数であるということである．

★ 連続（グラフがつながっていること）

$f(x)$ が $x=a$ で連続　⇔　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，$f(a)$ と一致する．

☆左右の極限が一致することでもある．

☆厳密な定義は $\epsilon-\delta$ 論法による．

(1)　$f(x)=\begin{cases} 4 & (\,x\leqq -2\,) \\ ax+b & (\,-2<x\leqq 1\,) \\ 1 & (\,1<x\,) \end{cases}$

$x=-2$ で連続　⇔　$4=-2a+b$

$x=1$ で連続　⇔　$a+b=1$

連立方程式を解くと，　$\boldsymbol{(a,b)=(-1,2)}$　**…答え**

(2)　$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (\,x<0\,) \\ a & (\,0\leqq x\leqq 3\,) \\ bx-3b & (\,3<x\,) \end{cases}$

$x=0$ で連続　⇔　$0+1=a$

⇔　$a=1$

$x=3$ で連続　⇔　$a=b\times 3-3b$

⇔　$a=0$

これらが同時に成立できないので，×　**…答え**

(3)　$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (\,x\neq 1\,) \\ a & (\,x=1\,) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$f(1)=a$

以上の結果から，　$\boldsymbol{a=2}$　**…答え**

☆$\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x\neq 1$ であるから，

$x=1$ で連続ではないことに注意．

(4)　$f(x)=\begin{cases} x+a & (\,x\leqq 0\,) \\ 2^{-\frac{1}{x}} & (\,0<x\,) \end{cases}$

$f(0)=0+a=a$　かつ　$x\leqq 0$ で連続

$0<x$ のとき，

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$

以上の結果から，　$\boldsymbol{a=0}$　**…答え**

2. $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で連続であるように a, b の値を定めよ．ただし無理な場合は単に×でよい．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分 ）

(1) $f(x) = \begin{cases} -7 & (x \leqq -3) \\ ax+b & (-3 < x \leqq 2) \\ 3 & (2 < x) \end{cases}$

$x = -3$ で連続 $\Leftrightarrow \ -7 = -3a + b$

$x = 2$ で連続 $\Leftrightarrow \ 2a + b = 3$

連立方程式を解くと，$\boldsymbol{(a, b) = (2, -1)}$ **…答え**

(2) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + a & (x < -1) \\ 1 & (-1 \leqq x \leqq 3) \\ bx + 2 & (3 < x) \end{cases}$

$x = -1$ で連続 $\Leftrightarrow \ -1 + a = 1$

$\Leftrightarrow \ a = 2$

$x = 3$ で連続 $\Leftrightarrow \ 1 = 3b + 2$

$\Leftrightarrow \ b = -\dfrac{1}{3}$

これらが同時に成立できないので，

$$\boldsymbol{(a, b) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)}$$ **…答え**

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x(x-1)} & (x \neq 0 \text{ かつ } x \neq 1) \\ a & (x = 0) \\ b & (x = 1) \end{cases}$

$$\frac{x^3 - x}{x(x-1)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

以上の結果から，$\boldsymbol{(a, b) = (1, 2)}$ **…答え**

(4) $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} & (x < 0) \\ x + a & (0 \leqq x) \end{cases}$

$f(0) = 0 + a = a$ かつ $0 \leqq x$ で連続

$x < 0$ のとき，$x = -t$ とおくと，

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{t \to +0} 2^{\frac{1}{t}} = \infty$$

以上の結果から，× **…答え**