

反射テスト 行列 1次変換 回転移動 01

1. 与えられた点を, 指定された分だけ原点を中心に回転移動させたときの点の座標を求めよ.

(S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) 点 $(1, 2)$ を 90° 回転移動

(2) 点 $(4, 0)$ を 60° 回転移動

(3) 点 (t, t^2) を 120° 回転移動

(4) 点 $(6a, -6a)$ を -45° 回転移動

2. 与えられた点を, 指定された分だけ原点を中心に回転移動させたときの点の座標を求めよ.

(S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) 点 $(2, 4)$ を 270° 回転移動

(2) 点 $(0, 6)$ を 30° 回転移動

(3) 点 $(t, \sqrt{3}t)$ を 150° 回転移動

(4) 点 $(\sqrt{6}a, -\sqrt{6}a)$ を -135° 回転移動

反射テスト 行列 1次変換 回転移動 01 解答解説

1. 与えられた点を、指定された分だけ原点を中心に回転移動させたときの点の座標を求めよ.

(S級2分10秒, A級3分, B級5分, C級7分)

★1次変換 回転移動

平面座標上の点 $P(x, y)$ を原点を中心に θ の回転移動をした点を $Q(x', y')$ とするとき,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 点 $(1, 2)$ を 90° 回転移動

(2) 点 $(4, 0)$ を 60° 回転移動

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(-2, 1)$ …答え

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(2, 2\sqrt{3})$ …答え

☆ 60° の回転移動は必修. 特に正三角形と関連して頻出.
この公式を使うことにより計算が格段に楽になる.

(3) 点 (t, t^2) を 120° 回転移動

(4) 点 $(6a, -6a)$ を -45° 回転移動

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \\ & \left(-\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2, \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{t^2}{2} \right) \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6a \\ -6a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6a \\ -6a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}a - 3\sqrt{2}a \\ -3\sqrt{2}a - 3\sqrt{2}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -6\sqrt{2}a \end{pmatrix} \\ & (0, -6\sqrt{2}a) \quad \dots\text{答え} \end{aligned}$$

☆ 放物線 $y = x^2$ 上の点を回転移動した場合に相当.

2. 与えられた点を、指定された分だけ原点を中心に回転移動させたときの点の座標を求めよ。

(S級2分10秒, A級3分, B級5分, C級7分)

(1) 点(2,4)を270°回転移動

(2) 点(0,6)を30°回転移動

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4, -2) …答え

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(-3, 3√3) …答え

(3) 点(t, √3t)を150°回転移動

(4) 点(√6a, -√6a)を-135°回転移動

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \frac{t}{2} - \frac{3t}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}t \\ -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(-√3t, -t) …答え

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(-135^\circ) & -\sin(-135^\circ) \\ \sin(-135^\circ) & \cos(-135^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}a \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}a \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}a - \sqrt{3}a \\ -\sqrt{3}a + \sqrt{3}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}a \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(-2√3a, 0) …答え

☆直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点を回転移動した場合に相当。