反射テスト　行列　行列の n 乗と固有方程式　01

1.　与えられた行列 A に対して，A^n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）を求めよ．（S 級 5 分，A 級 8 分，B 級 12 分，C 級 17 分）

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

2. 与えられた行列 A に対して，A^n（$n=1,2,3,\cdots$）を求めよ．（S 級 7 分，A 級 11 分，B 級 15 分，C 級 20 分）

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

反射テスト　行列　行列の n 乗と固有方程式　01　解答解説

1.　与えられた行列 A に対して，A^n（$n=1,2,3,\cdots$）を求めよ．（S 級 5 分，A 級 8 分，B 級 12 分，C 級 17 分）

★ 行列 A の固有方程式

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，ケーリーハミルトンの定理を用いて，

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

このとき，A を x に，E を 1 に，O を 0 に置き換えた方程式を作る．

$\boldsymbol{x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0}$

この式を A の **固有方程式** という．

(1)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

ケーリーハミルトンの定理より，　$A^2-(1+4)A+\{1\cdot 4-1\cdot(-2)\}E=O \iff A^2-5A+6E=O$

よって，A の固有方程式は　$x^2-5x+6=0 \iff (x-2)(x-3)=0 \iff x=2,3$

$x^n=(x^2-5x+6)\cdot P(x)+px+q$ とおいて，

$$\begin{cases} x=2 \text{ を代入すると，} & 2^n=2p+q \\ x=3 \text{ を代入すると，} & 3^n=3p+q \end{cases} \iff \begin{cases} p=-2^n+3^n \\ q=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad A^n &= (A^2-5A+6E)\cdot P(A)+pA+qE \\ &= pA+qE=p\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+q & p \\ -2p & 4p+q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n+3^n+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n & -2^n+3^n \\ -2(-2^n+3^n) & 4\cdot(-2^n+3^n)+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{2^{n+1}-3^n} & \boldsymbol{-2^n+3^n} \\ \boldsymbol{2^{n+1}-2\cdot 3^n} & \boldsymbol{-2^n+2\cdot 3^n} \end{pmatrix} \quad \textbf{…答え} \end{aligned}$$

☆見直し（ 1, 2, 3 で考えろ ）

$n=1$ を代入して確かめる．正答率が飛躍的アップするだろう．

(2)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

ケーリーハミルトンの定理より，　$A^2-(3-1)A+\{3\cdot(-1)-1\cdot(-4)\}E=O \iff A^2-2A+E=O$

よって，A の固有方程式は　$x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$

$x^n=(x-1)^2\cdot P(x)+px+q$ とおけば，

$$\begin{cases} x=1 \text{ を代入すると，} & 1=p+q \\ \text{両辺を微分して 1 を代入すると，} & n\cdot x^{n-1}=2(x-1)\cdot P(x)+(x-1)^2\cdot P'(x)+p \quad \Rightarrow \quad n=p \end{cases}$$

よって，　$p=n$，$q=1-n$

$$\begin{aligned} \therefore\quad A^n &= (A^2-2A+E)\cdot P(A)+pA+qE \\ &= pA+qE=p\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3p+q & p \\ -4p & -p+q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3n+(1-n) & n \\ -4n & -n+(1-n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{1+2n} & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{-4n} & \boldsymbol{1-2n} \end{pmatrix} \quad \textbf{…答え} \end{aligned}$$

☆見直し（ 1, 2, 3 で考えろ ）

$n=1$ を代入して確かめる．正答率が飛躍的アップするだろう．

2. 与えられた行列 A に対して，A^n（$n=1,2,3,\cdots$）を求めよ．（S 級 7 分，A 級 11 分，B 級 15 分，C 級 20 分）

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

ケーリーハミルトンの定理より，$A^2-(1+2)A+(1\cdot2-3\cdot2)E=O \iff A^2-3A-4E=O$

よって，A の固有方程式は $x^2-3x-4=0 \iff (x+1)(x-4)=0 \iff x=-1,4$

$x^n=(x^2-3x-4)\cdot P(x)+px+q$ とおいて，

$$\begin{cases} x=-1 \text{ を代入すると，} & (-1)^n=-p+q \\ x=4 \text{ を代入すると，} & 4^n=4p+q \end{cases} \iff \begin{cases} p=\dfrac{4^n-(-1)^n}{5} \\ q=\dfrac{4^n+4\cdot(-1)^n}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad A^n &= (A^2-3A-4E)\cdot P(A)+pA+qE\\ &= pA+qE=p\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+q & 3p\\ 2p & 2p+q\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4^n-(-1)^n+4^n+4\cdot(-1)^n & 3\{4^n-(-1)^n\}\\ 2\{4^n-(-1)^n\} & 2\{4^n-(-1)^n\}+4^n+4\cdot(-1)^n\end{pmatrix}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\cdot4^n+3\cdot(-1)^n & 3\cdot4^n-3\cdot(-1)^n\\ 2\cdot4^n-2\cdot(-1)^n & 3\cdot4^n+2\cdot(-1)^n\end{pmatrix}} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

☆見直し（1, 2, 3 で考えろ）
$n=1$ を代入して確かめる．正答率が飛躍的アップするだろう．

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

ケーリーハミルトンの定理より，$A^2-(2-4)A+\{2\cdot(-4)-(-3)\cdot3\}E=O \iff A^2+2A+E=O$

よって，A の固有方程式は $x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x=-1$

$x^n=(x+1)^2\cdot P(x)+px+q$ とおけば，

$$\begin{cases} x=-1 \text{ を代入すると，} & (-1)^n=-p+q \\ \text{両辺を微分して } -1 \text{ を代入すると，} & n\cdot x^{n-1}=2(x+1)\cdot P(x)+(x+1)^2\cdot P'(x)+p \Rightarrow n\cdot(-1)^{n-1}=p \end{cases}$$

よって，$p=n\cdot(-1)^{n-1}=-n\cdot(-1)^n$，$q=(1-n)\cdot(-1)^n$ （$q=(n-1)\cdot(-1)^{n-1}$ でもよい）

$$\begin{aligned}\therefore\quad A^n &= (A^2+2A+E)\cdot P(A)+pA+qE\\ &= pA+qE=p\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p+q & -3p\\ 3p & -4p+q\end{pmatrix}\\ &= (-1)^n\begin{pmatrix}-2n+(1-n) & -3\cdot(-n)\\ 3\cdot(-n) & -4\cdot(-n)+(1-n)\end{pmatrix}\\ &= \boldsymbol{(-1)^n\begin{pmatrix}1-3n & 3n\\ -3n & 1+3n\end{pmatrix}} \quad \textbf{…答え}\\ &= \boldsymbol{(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}3n-1 & -3n\\ 3n & -3n-1\end{pmatrix}} \quad \textbf{…答え}\end{aligned}$$

☆見直し（1, 2, 3 で考えろ）
$n=1$ を代入して確かめる．正答率が飛躍的アップするだろう．