反射テスト　行列　行列の累乗と n 乗の推定　02　難

1.　与えられた行列 A に対して，A^n を推定せよ．(S 級 2 分 40 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分)

(1)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(4)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. 与えられた行列 A に対して, A^n を推定せよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

反射テスト　行列　行列の累乗と n 乗の推定　02　難　解答解説

1.　与えられた行列 A に対して，A^n を推定せよ.（ S 級 2 分 40 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分 ）

★ 行列の n 乗の決定（ ☆1, 2, 3 で考えろ ）

①　A^2，A^3，$\cdots$ を計算する.

②　各成分の値を見て，それぞれを n の式で表す.

③　数学的帰納法によって証明.（ ここでは推定なので証明する必要はない. ）

★ よく出題される A^n

$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ のとき，$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$　　$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^n=\begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^n=\begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n-1}{a-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき，$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

(1)　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

☆これは単位行列と似ているが…

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（$=E$：単位行列）

$A^3=A^2\cdot A=E\cdot A=A$

$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=E$

つまり，A，E，A，E，$\cdots$

$$\boldsymbol{A^n=\begin{cases} A & (\ n\ \text{が奇数のとき}\ ) \\ E & (\ n\ \text{が偶数のとき}\ ) \end{cases}}$$ **…答え**

☆解答の別表記

$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-(-1)^n & 1-(-1)^{n-1} \\ 1-(-1)^{n-1} & 1-(-1)^n \end{pmatrix}$ **…答え**

(2)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$ **…答え**

(3)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4n & 1 \end{pmatrix}}$ **…答え**

(4)　$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

難しいのは 1 行 2 列目の成分.

並べてみると，$1, 4, 12, 32, \cdots$

$\Rightarrow 1\cdot 1$，$2\cdot 2$，$3\cdot 4$，$4\cdot 8$，$\cdots$，$n2^{n-1}$

$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$ **…答え**

☆これは推定できなくてもかまわない. ただし **固有方程式** による解法ができるようにしておこう.

2. 与えられた行列 A に対して，A^n を推定せよ.（ S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 20 秒，C 級 6 分 ）

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

☆これは単位行列と似ているが…

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ （ $=E$：単位行列）

$A^3=A^2\cdot A=E\cdot A=A$

$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=E$

つまり，A，E，A，E，…

$$\boldsymbol{A^n=\begin{cases}A & (\,n\text{ が奇数のとき}\,)\\ E & (\,n\text{ が偶数のとき}\,)\end{cases}}$$ **…答え**

(2) $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}64 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}256 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}}$$ **…答え**

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$ **…答え**

(4) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 12 & 8\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 32 & 16\end{pmatrix}$

難しいのは 2 行 1 列目の成分.

並べてみると，$1, 4, 12, 32, \cdots$

$\Rightarrow 1\cdot 1$, $2\cdot 2$, $3\cdot 4$, $4\cdot 8$, $\cdots$, $n2^{n-1}$

$$\boldsymbol{A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ n2^{n-1} & 2^n\end{pmatrix}}$$ **…答え**

☆これは推定できなくてもかまわない. ただし **固有方程式** による解法ができるようにしておこう.