反射テスト　行列　行列の累乗と n 乗の推定　01

1.　与えられた行列 A に対して，A^2，A^3，A^4 を計算し，A^n を推定せよ．必要とあれば単位行列は E としてよい．

（S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 20 秒，C 級 6 分）

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.　与えられた行列 A に対して，A^2，A^3，A^4 を計算し，A^n を推定せよ．必要とあれば単位行列は E としてよい．

（S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分）

(1)　$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

反射テスト　行列　行列の累乗と n 乗の推定　01　解答解説

1. 　与えられた行列 A に対して，A^2，A^3，A^4 を計算し，A^n を推定せよ．必要とあれば単位行列は E としてよい．

（S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 20 秒，C 級 6 分）

★ 行列の累乗

$A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A \cdot A \cdot A$，$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$，$\cdots$

★ 行列の n 乗の決定（☆1, 2, 3 で考えろ）

① 　A^2，A^3，$\cdots$ を計算する．

② 　各成分の値を見て，それぞれを n の式で表す．

③ 　数学的帰納法によって証明．（ここでは推定なので証明する必要はない．）

(1) 　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☆これは単位行列 E なので，行列を変化させない．

$\boldsymbol{A^2 = E}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^3 = E}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^4 = E}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^n = E}$　**…答え**

(2) 　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$　**…答え**

☆別解

この問題は次のような計算で求めることも可能．

$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \left\{ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n = 2^n E^n = 2^n E$

(3) 　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

(4) 　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

2. 与えられた行列 A に対して, A^2 , A^3 , A^4 を計算し, A^n を推定せよ. 必要とあれば単位行列は E としてよい.

（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ よく出題される A^n

$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ のとき, $A^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$　　$A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ のとき, $A^n=\begin{pmatrix}1&an\\0&1\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a&1\\0&1\end{pmatrix}$ のとき, $A^n=\begin{pmatrix}a^n&\frac{a^n-1}{a-1}\\0&1\end{pmatrix}$　　$A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$ のとき, $A^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$

(1) $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$A=-E$ より,

$\boldsymbol{A^2}=(-E)^2=\boldsymbol{E}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^3}=A^2\cdot A=E\cdot(-E)=\boldsymbol{-E}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^4}=A^3\cdot A=-E\cdot(-E)=\boldsymbol{E}$ **…答え**

$$\boldsymbol{A^n}=\begin{cases}\boldsymbol{-E} & \textbf{（ n が奇数のとき ）}\\ \boldsymbol{E} & \textbf{（ n が偶数のとき ）}\end{cases}$$ **…答え**

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^3}=\begin{pmatrix}\mathbf{8}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^4}=\begin{pmatrix}\mathbf{16}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix}$ **…答え**

★ $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ のとき

(3) $A=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{10}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^3}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{15}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^4}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{20}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{5}\boldsymbol{n}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **…答え**

★ $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ のとき

(4) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A^2}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^3}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{7}&\mathbf{8}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^4}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{15}&\mathbf{16}\end{pmatrix}$ **…答え**

$\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{-1}&\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix}$ **…答え**

★ $\begin{cases}A=\begin{pmatrix}a&1\\0&1\end{pmatrix}\text{ のとき, }A^n=\begin{pmatrix}a^n&\frac{a^n-1}{a-1}\\0&1\end{pmatrix}\\ A=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}\text{ のとき, }A^n=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{a^n-1}{a-1}&a^n\end{pmatrix}\end{cases}$