反射テスト　行列　ケーリー・ハミルトンの定理と次数下げ　01

1.　次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用し A^2 を A と E で表せ.（ S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 20 秒, C 級 2 分 ）

(1)　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 3a & 5a \\ -2a & -3a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

2.　A^3 , A^4 を A と E の式で表せ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 50 秒, C 級 4 分 ）

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 4a & a \\ 8a & 2a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

3. 次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用し A^2 を A と E で表せ.

(S 級 40 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 30 秒)

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & t \end{pmatrix}$ (t は実数)

4. A^3 , A^4 を A と E の式で表せ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

(1) $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} t+1 & 2+t \\ 1-t & -t \end{pmatrix}$ (t は実数)

反射テスト　行列　ケーリー・ハミルトンの定理と次数下げ　01　解答解説

1.　次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用し A^2 を A と E で表せ.（ S 級 30 秒, A 級 50 秒, B 級 1 分 20 秒, C 級 2 分 ）

★ ケーリー・ハミルトンの定理と次数下げのテクニック

2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E}$$

(1)　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2 - (4+1)A + (4\cdot 1 - 2\cdot 3)E = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 - 5A - 2E = O$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A^2 = 5A + 2E}$　**…答え**

(2)　$A = \begin{pmatrix} 3a & 5a \\ -2a & -3a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2 - \{3a + (-3a)\}A + \{3a\cdot(-3a) - 5a\cdot(-2a)\}E = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 + a^2E = O$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A^2 = -a^2E}$　**…答え**

2.　A^3 , A^4 を A と E の式で表せ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 2 分 50 秒, C 級 4 分 ）

★ 次数下げのテクニック

ケーリー・ハミルトンの定理により, A^2 を A の 1 次式で表す. この式を①とする.

$\Rightarrow$ $A^3 = A\cdot A^2$ に①を代入し A^3 を A の 2 次式で表す. この式の A^2 に①を代入すれば A^3 も A の 1 次式で表せる. (②)

$\Rightarrow$ $A^4 = A\cdot A^3$ に②を代入し A^4 を A の 2 次式で表す. この式の A^2 に①を代入すれば A^4 も A の 1 次式で表せる.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2 - (3-2)A + \{3\cdot(-2) - (-1)\cdot 5\}E = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 - A - E = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 = A + E$

よって,

$A^3 = A^2\cdot A = (A+E)\cdot A = A^2 + A$

$\quad = (A+E) + A = \boldsymbol{2A + E}$　**…答え**

$A^4 = A^3\cdot A = (2A+E)\cdot A = 2A^2 + A$

$\quad = 2(A+E) + A = \boldsymbol{3A + 2E}$　**…答え**

(2)　$A = \begin{pmatrix} 4a & a \\ 8a & 2a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2 - (4a+2a)A + \{4a\cdot 2a - a\cdot 8a\}E = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 - 6aA = O$

$\Leftrightarrow \quad A^2 = 6aA$

よって,

$A^3 = A^2\cdot A = 6aA\cdot A = 6aA^2 = 6a\cdot 6aA$

$\quad = \boldsymbol{36a^2A}$　**…答え**

$A^4 = A^3\cdot A = 36a^2A\cdot A = 36a^3A^2 = 36a^3\cdot 6aA$

$\quad = \boldsymbol{216a^3A}$　**…答え**

3.　次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用し A^2 を A と E で表せ.

（ S 級 40 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 30 秒 ）

(1)　$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{4+(-5)\}A+\{4\cdot(-5)-6\cdot(-3)\}E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2+A-2E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2=\boldsymbol{-A+2E}$　**…答え**

(2)　$A=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & t \end{pmatrix}$　（ t は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{(1-t)+t\}A+\{(1-t)\cdot t-t\cdot(-t)\}E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2-A+(t-t^2+t^2)E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2-A+tE=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2=\boldsymbol{A-tE}$　**…答え**

4.　A^3 , A^4 を A と E の式で表せ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})A+\{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})\}E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2+A+E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2=-A-E$

よって,

$A^3=A^2\cdot A=(-A-E)\cdot A=-A^2-A$

$\quad=-(-A-E)-A=\boldsymbol{E}$　**…答え**

$A^4=A^3\cdot A=E\cdot A=\boldsymbol{A}$　**…答え**

(2)　$A=\begin{pmatrix} t+1 & 2+t \\ 1-t & -t \end{pmatrix}$　（ t は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{t+1+(-t)\}A+\{(t+1)\cdot(-t)-(2+t)\cdot(1-t)\}E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2-A-2E=O$

$\Leftrightarrow\quad A^2=A+2E$

よって,

$A^3=A^2\cdot A=(A+2E)\cdot A=A^2+2A$

$\quad=(A+2E)+2A=\boldsymbol{3A+2E}$　**…答え**

$A^4=A^3\cdot A=(3A+2E)\cdot A=3A^2+2A$

$\quad=3(A+2E)+2A=\boldsymbol{5A+6E}$　**…答え**