反射テスト　行列　ケーリー・ハミルトンの定理　01

1.　次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用せよ.（ S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 ）

(1)　$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3)　$A = \begin{pmatrix} 2a & 4a \\ -a & -2a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

(4)　$A = \begin{pmatrix} t & 1+t \\ 1-t & -t \end{pmatrix}$　（ t は実数 ）

2. 次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用せよ.（ S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 ）

(1) $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -a & a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ （ a は実数 ）

(4) $A = \begin{pmatrix} t-1 & t \\ -t+2 & 1-t \end{pmatrix}$ （ t は実数 ）

反射テスト　行列　ケーリー・ハミルトンの定理　01　解答解説

1.　次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用せよ.（ S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 ）

★ ケーリー・ハミルトンの定理

2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき,　$\boldsymbol{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O}$

n 行 n 列の行列の場合,　$\begin{cases} \mathrm{tr}\,A & = & \text{斜め成分の和（ 1 行 1 列成分 + 2 行 2 列成分 + ⋯ + } n \text{ 行 } n \text{ 列成分 ）} \\ \det A & = & A \text{ の行列式} \end{cases}$　に対して,

$\boldsymbol{A^2-(\,\mathrm{tr}\,A\,)A+(\det A)E=O}$ が成立する.

(1)　$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{8+(-5)\}A+\{8\cdot(-5)-6\cdot(-7)\}E=O$

⇔ $\boldsymbol{A^2-3A+2E=O}$　**…答え**

(2)　$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-(6+1)A+(6\cdot1-2\cdot3)E=O$

⇔ $\boldsymbol{A^2-7A=O}$　**…答え**

(3)　$A=\begin{pmatrix} 2a & 4a \\ -a & -2a \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{2a+(-2a)\}A+\{2a\cdot(-2a)-4a\cdot(-a)\}E=O$

⇔ $\boldsymbol{A^2=O}$　**…答え**

☆行列には, 零行列ではないのに,
2 乗して零行列になるものがある.

★一般に,　$a+d=0$,　$ad-bc=0$ のとき,　$A^2=O$

(4)　$A=\begin{pmatrix} t & 1+t \\ 1-t & -t \end{pmatrix}$　（ t は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{t+(-t)\}A+\{t\cdot(-t)-(1+t)\cdot(1-t)\}E=O$

⇔ $\boldsymbol{A^2-E=O}$　**…答え**

☆答えの式より,　$A^2=E$

★一般に, $a+d=0$, $ad-bc=-1$ のとき, $A^2=E$
（ 2 乗して単位行列になる ）

2. 次の行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を適用せよ.（ S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分 ）

(1) $A=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -6 & 3\end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{(-7)+3\}A+\{(-7)\cdot 3-4\cdot(-6)\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A^2+4A+3E=O}$ **…答え**

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -8\end{pmatrix}$

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{1+(-8)\}A+\{1\cdot(-8)-4\cdot(-2)\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A^2+7A=O}$ **…答え**

(3) $A=\begin{pmatrix}-a & a^2\\ -1 & a\end{pmatrix}$ （ a は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-(-a+a)A+\{(-a)\cdot a-a^2\cdot(-1)\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A^2=O}$ **…答え**

☆行列には, 零行列ではないのに,
2 乗して零行列になるものがある.

★一般に, $a+d=0$, $ad-bc=0$ のとき, $A^2=O$

(4) $A=\begin{pmatrix}t-1 & t\\ -t+2 & 1-t\end{pmatrix}$ （ t は実数 ）

★ケーリー・ハミルトンの定理より,

$A^2-\{(t-1)+(1-t)\}A+\{(t-1)\cdot(1-t)-t(-t+2)\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $A^2+\{-(t-1)^2+t^2-2t\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $A^2+\{-(t^2-2t+1)+t^2-2t\}E=O$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A^2-E=O}$ **…答え**

☆答えの式より, $A^2=E$

★一般に, $a+d=0$, $ad-bc=-1$ のとき, $A^2=E$
(2 乗して単位行列になる)