反射テスト　行列　行列式と逆行列　01

1.　次の行列の行列式を求め，逆行列があるかどうか言え．あるときは，それも書け．

（ S 級 1 分，A 級 1 分 40 秒，B 級 2 分 40 秒，C 級 4 分 ）

(1)　$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　（ k は実数 ）

(4)　$\begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

2.　次の行列の行列式を求め，逆行列があるかどうか言え．あるときは，それも書け．

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 5 分 40 秒 ）

(1)　$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$　（ a, b は実数 ）

(4)　$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$　（ a, b は実数 ）

反射テスト　行列　行列式と逆行列　01　解答解説

1.　次の行列の行列式を求め，逆行列があるかどうか言え．あるときは，それも書け．

（ S 級 1 分，A 級 1 分 40 秒，B 級 2 分 40 秒，C 級 4 分 ）

★ 行列式　$\boldsymbol{\Delta = \det A = ad - bc}$

2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき，$ad-bc$ をその行列の **行列式** といい，Δ もしくは $\det A$（ディターミナント A）と表す．

★ 逆行列

$AB = BA = E$ となるとき（E は単位行列），B を A の逆行列といい，A^{-1}（A インバース）で表す．（ $\therefore AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ）

A の逆行列が存在する条件は，$\Delta \neq 0$ のときであり，$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　となる．

(1)　$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\Delta = (-1)\cdot 6 - (-2)\cdot 3 = \mathbf{0}$

よって，**逆行列はない．**

(2)　$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

$\Delta = 8\cdot(-5) - (-6)\cdot 7 = \mathbf{2}$

よって，**逆行列はある．**

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}}$$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　（ k は実数 ）

$\Delta = 1^2 - k\cdot 1 = \boldsymbol{1-k}$

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{k=1} \text{ **のとき，逆行列はない．**} \\ \boldsymbol{k \neq 1} \text{ **のとき，逆行列はある．**} \end{cases}$

$k \neq 1$ のときの逆行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{1-k}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{1}{1-k} & \frac{k}{k-1} \\ \frac{1}{k-1} & \frac{1}{1-k} \end{pmatrix}}$$

(4)　$\begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$　（ a は実数 ）

$\Delta = a^2\cdot 1 - 1\cdot a = a^2 - a = \boldsymbol{a(a-1)}$

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a=0} \text{ **又は** } \boldsymbol{a=1} \text{ **のとき，逆行列はない．**} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \text{ **かつ** } \boldsymbol{a \neq 1} \text{ **のとき，逆行列はある．**} \end{cases}$

$a \neq 0$ かつ $a \neq 1$ のときの逆行列は，

$$\begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{a(a-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -a & a^2 \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a(a-1)} \\ \frac{1}{1-a} & \frac{a}{a-1} \end{pmatrix}}$$

2. 次の行列の行列式を求め，逆行列があるかどうか言え．あるときは，それも書け．

(S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 5 分 40 秒)

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$\Delta = 4 \cdot 5 - (-2) \cdot (-7) = \mathbf{6}$

よって，**逆行列はある．**

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

(2) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

$\Delta = (-2) \cdot 12 - (-6) \cdot 4 = \mathbf{0}$

よって，**逆行列はない．**

(3) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ (a , b は実数)

$\Delta = a \cdot 1 - 1 \cdot b = \boldsymbol{a - b}$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a = b} \textbf{ のとき，逆行列はない．} \\ \boldsymbol{a \neq b} \textbf{ のとき，逆行列はある．} \end{cases}$$

$a \neq b$ のときの逆行列は，

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & -\frac{1}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} & \frac{a}{a-b} \end{pmatrix}}$$

(4) $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$ (a , b は実数)

$\Delta = (a+b)^2 - (a-b)(b-a) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = \boldsymbol{2(a^2 + b^2)}$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \textbf{ かつ } \boldsymbol{b = 0} \textbf{ のとき，逆行列はない．} \\ \boldsymbol{a \neq 0} \textbf{ 又は } \boldsymbol{b \neq 0} \textbf{ のとき，逆行列はある．} \end{cases} \quad \leftarrow ☆$$

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のときの逆行列は，

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-a & a+b \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2(a^2+b^2)}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2(a^2+b^2)} & \frac{b-a}{2(a^2+b^2)} \\ \frac{a-b}{2(a^2+b^2)} & \frac{a+b}{2(a^2+b^2)} \end{pmatrix}}$$

☆「(A かつ B) ではない」

=「(A ではない) または (B ではない)」

これはド・モルガンの法則を日本語訳したものある．

★ド・モルガンの法則

「 p かつ q 」の否定 ～ $\overline{p \text{ かつ } q}$ ⇔ $\overline{p}$ 又は $\overline{q}$

「 p 又は q 」の否定 ～ $\overline{p \text{ 又は } q}$ ⇔ $\overline{p}$ かつ $\overline{q}$

「 $\overline{p}$ 」は「 p ではない 」を表す．