反射テスト　行列　行列の決定　01

1.　次の条件を満たす行列 A を定めよ. ただし a, b は実数.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ かつ $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $A^2 + 2A - 3E = O$

2. 次の条件を満たす行列 A を定めよ. ただし a, b は実数.（S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分）

(1) $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ かつ $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ かつ $A^3=E$

反射テスト　行列　行列の決定　01　解答解説

1.　次の条件を満たす行列 A を定めよ．ただし a, b は実数．(S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分)

★ 行列の決定

基本：求める行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき，条件にあてはめる．

(1)　$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$　かつ　$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

各成分を比較して，　$a^2 = 4$　かつ　$a + b = 3$　かつ　$b^2 = 1$

解くと，　$(a, b) = (2, 1)$

よって，　$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

(2)　$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　かつ　$A^2 + 2A - 3E = O$

$A^2 + 2A - 3E = O$ に $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を代入すると，

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 3a+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 2a - 3 & 3a + 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$a^2 + 2a - 3 = 0$　かつ　$3a + 9 = 0$
$\Leftrightarrow$　$(a+3)(a-1) = 0$　かつ　$a + 3 = 0$
$\Leftrightarrow$　$a = -3, 1$　かつ　$a = -3$
$\Leftrightarrow$　$a = -3$

よって，　$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$　**…答え**

☆ケーリー・ハミルトンの定理による別解法もある．

2. 次の条件を満たす行列 A を定めよ．ただし a, b は実数．(S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分)

(1) $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ かつ $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+6 & 3a+3b \\ 2a+2b & 6+b^2 \end{pmatrix}$$

各成分を比較して，

$$\begin{aligned} a^2+6 &= 7 & \qquad 3a+3b &= 0 \\ 2a+2b &= 0 & \qquad 6+b^2 &= 7 \end{aligned}$$

これらを，a, b について解くと， $(a,b) = (1,-1)$ 又は $(-1,1)$

よって， $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$ **又は** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$ **…答え**

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ かつ $A^3 = E$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$A^3 = E$ より，各成分の比較をして，

$a^3 = 1$ かつ $3a^2b = 0$

$\Leftrightarrow$ $a = 1$ かつ $b = 0$ ($\because$ a は実数)

よって， $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ **…答え**