反射テスト　行列　行列の積　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 40 秒 ）

(1)　$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$

(4)　$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 40 秒 ）

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$

反射テスト　行列　行列の積　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 40 秒 ）

★ 行列と行列の積

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & q \\ \boldsymbol{r} & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

(1)　$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 0+5\cdot 1 \\ 3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 0+5\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$ **…答え**

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0+4\cdot 2 & 1\cdot 1+4\cdot 3 \\ 16\cdot 0+64\cdot 2 & 16\cdot 1+64\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{13} \\ \mathbf{128} & \mathbf{208} \end{pmatrix}$$ **…答え**

★ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列といい, E で表すことが多い.
掛けても行列を変えない性質をもつ.
数の四則演算における「1」に相当する.

(3)　$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & a\cdot 0+b\cdot 1 \\ 1\cdot a+1\cdot b & 1\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2+b^2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a+b} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ **…答え**

(4)　$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+0\cdot b & a\cdot b+0\cdot 1 \\ b\cdot a+1\cdot 1 & b^2+1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ab+1} & \boldsymbol{b^2+1} \end{pmatrix}$$ **…答え**

☆ (3) と (4) から, 一般に $AB \neq BA$ といえる.
$ab = ba$ が成り立つことを「**交換則** を満たす」という.
行列の積では, 交換則が成り立たない.

2. 次の計算をせよ.（S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 40 秒）

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 0+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 0+5\cdot 0 \\ 3\cdot 0+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 0+5\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **…答え**

★ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列といい,
O（アルファベットの大文字）で表すことが多い.
何に掛けても零行列にする性質をもつ.
数の四則演算における「0」に相当する.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0+16\cdot 2 & 1\cdot 1+16\cdot 3 \\ 9\cdot 0+4\cdot 2 & 9\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{32} & \mathbf{49} \\ \mathbf{8} & \mathbf{21} \end{pmatrix}$ **…答え**

(3) $\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$

第 1 行第 1 列成分
$(a+1)^2+(a+2)(-a) = a^2+2a+1-a^2-2a = 1$

第 1 行第 2 列成分
$(a+1)(-a-2)+(a+2)(a+1)$
$= -(a+1)(a+2)+(a+2)(a+1) = 0$

第 2 行第 1 列成分
$a(a+1)+(a+1)(-a) = a(a+1)-a(a+1) = 0$

第 2 行第 2 列成分
$a(-a-2)+(a+1)^2 = -a^2-2a+a^2+2a+1 = 1$

$\therefore$ 与式 $= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **…答え**

(4) $\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$

第 1 行第 1 列成分
$(a+1)^2+(-a-2)a = a^2+2a+1-a^2-2a = 1$

第 1 行第 2 列成分
$(a+1)(a+2)+(-a-2)(a+1)$
$= (a+1)(a+2)-(a+2)(a+1) = 0$

第 2 行第 1 列成分
$-a(a+1)+(a+1)a = -a(a+1)+a(a+1) = 0$

第 2 行第 2 列成分
$-a(a+2)+(a+1)^2 = -a^2-2a+a^2+2a+1 = 1$

$\therefore$ 与式 $= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **…答え**

★ 逆行列
(3) と (4) のように, $AB = BA$ が成立することもある.
しかもこの場合, $AB = BA = E$(単位行列）になる.
このとき, B を A の **逆行列** といい, A^{-1} と表す.
つまり, この場合では,
$\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$ の逆行列である.
また, $\begin{pmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a+1 & -a-2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$ の逆行列とも言える.