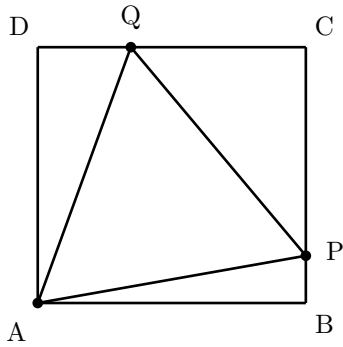


# 反射テスト 複素平面 証明 正三角形と線分比 01

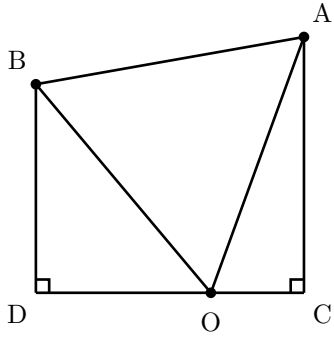
1. 下図のように長方形 ABCD の中に正三角形 APQ がある.

$AB = a$ ,  $DQ = b$  とするとき,  $PB : DA$  を  $a, b$  で表せ.

( S 級 2 分、A 級 3 分、B 級 5 分、C 級 7 分 )



2. 下図のように正三角形  $OAB$  があり,  $O$  を通る直線に  $A, B$  から下ろした垂線の足を  $C, D$  とする.  
 $AC = a$ ,  $BD = b$  とするとき,  $OC : OD$  を  $a, b$  で表せ. (  $S$  級 2 分 35 秒,  $A$  級 4 分,  $B$  級 6 分,  $C$  級 8 分 )

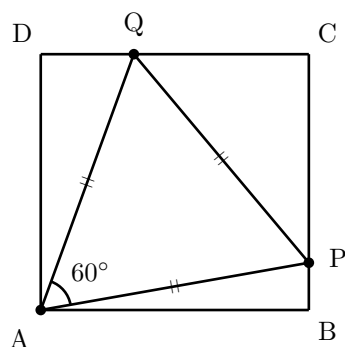


# 反射テスト 複素平面 証明 正三角形と線分比 01 解答解説

1. 下図のように長方形 ABCD の中に正三角形 APQ がある.

$AB = a$ ,  $DQ = b$  とするとき,  $PB : DA$  を  $a, b$  で表せ.

( S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 )



正の実数  $x, y$  を用いて,  
 $PB = x$ ,  $DA = y$  とする.

A を原点, AB を実軸として複素平面で考えると,

正の実数  $a, b, x, y$  に対して,

$P(a + xi)$ ,  $Q(b + yi)$   
 である.

また AP を点 A を中心に  $60^\circ$  回転すると AQ になるから,

$$\begin{aligned} b + yi &= (a + xi) \times (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= \left( \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \left( \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) i \end{aligned}$$

実数を比較して,

$$b = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{かつ} \quad y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

これを  $x, y$  について解くと,

$$x = \frac{a - 2b}{\sqrt{3}} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{a - b}{\sqrt{3}}$$

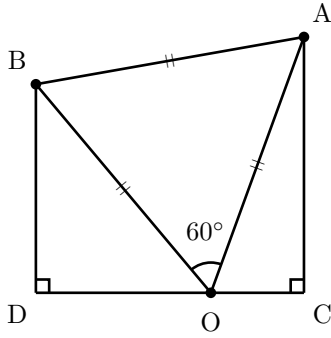
$$\therefore x : y = (a - 2b) : (a - b)$$

ただし,  $0 < 2b < a$  のとき

2. 下図のように正三角形 OAB があり, O を通る直線に A, B から下ろした垂線の足を C, D とする.

$AC = a$ ,  $BD = b$  とするとき,  $OC : OD$  を  $a, b$  で表せ.

( S 級 2 分 35 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 )



正の実数  $x, y$  を用いて,  
 $OC = x$ ,  $OD = y$  とする.

O を原点, DC を実軸として複素平面で考えると,

正の実数  $a, b, x, y$  に対して,

$A(x + ai)$ ,  $B(-y + bi)$   
である.

また OA を原点を中心に  $60^\circ$  回転すると OB になるから,

$$\begin{aligned} -y + bi &= (x + ai) \times (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= \left( \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) + \left( \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) i \end{aligned}$$

実数を比較して,

$$-y = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{かつ} \quad b = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

これを  $x, y$  について解くと,

$$x = \frac{2b - a}{\sqrt{3}} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{2a - b}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x : y = (2b - a) : (2a - b)$$

ただし,  $0 < \frac{b}{2} < a < 2b$  のとき