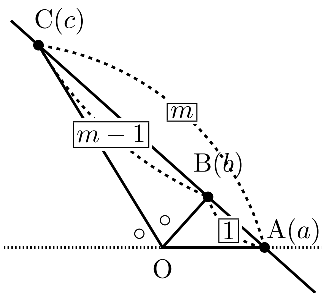
反射テスト　複素平面　証明　外角の二等分線と線分比　01

1.　下図のように複素平面上に OA $>$ OB を満たす △OAB があり，OC が∠AOB の外角の二等分線となるように直線 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．式変形において **0 で割る可能性** を言う必要はない．

（ S 級 7 分、A 級 12 分、B 級 18 分、C 級 25 分 ）



(1)　実数 m を用いて，AC : CB $= m : (m-1)$ とおく．c を a, b, x で表せ．
C は左図のように半直線上 AB 上にあって線分 AB 上にはないものとする．

(2)　(1) から，$\overline{c}$ を $\overline{a}$, $\overline{b}$, m で表せ．

(3)　線分 OC が∠AOB の外角の二等分線という条件について，
偏角 arg を用いて a, b, c について等式を作れ．

(4)　(3) の等式から絶対値を利用して変形すると，$\dfrac{c^2}{|c|^2} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$を埋めよ．

(5)　$|z|^2 = z\overline{z}$ であるから，(4) から絶対値 $|c|^2$を消去すると，$\dfrac{c}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$を埋めよ．

(6)　(1), (2) を用いて，(5) から $c, \overline{c}$ を消去し，m について解け．

(7)　$\dfrac{m}{m-1}$ を a, b で表せ．

★ **外角の二等分線と線分比** の関係についての証明である．
☆0 で割る可能性について言及していないので，証明として不完全である．

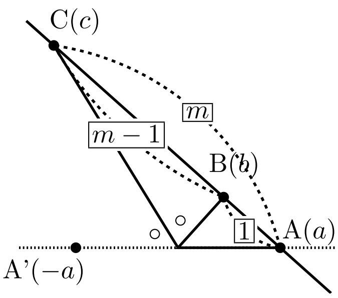
2. 複素平面上に OAB があり，OC が$\angle$AOB の外角の二等分線となるように直線 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．

OA : OB = AC : BC を証明せよ．また例外条件についても言え．　（S 級 11 分、A 級 16 分、B 級 22 分、C 級 30 分）

反射テスト　複素平面　証明　外角の二等分線と線分比　01　解答解説

1.　下図のように複素平面上に OA > OB を満たす △OAB があり，OC が∠AOB の外角の二等分線となるように直線 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．式変形において **0 で割る可能性** を言う必要はない．

（ S 級 7 分、A 級 12 分、B 級 18 分、C 級 25 分 ）



(1)　実数 m を用いて，AC : CB $= m : (m-1)$ とおく．c を a, b, x で表せ．
C は左図のように半直線上 AB 上にあって線分 AB 上にはないものとする．

★ **外分点公式**　複素平面の場合も同様である．

$$c = \frac{-(m-1)}{m-(m-1)}a + \frac{m}{m-(m-1)}b = \boldsymbol{c = (1-m)a + mb} \quad \textbf{ただし } \boldsymbol{1 < m}$$

(2)　(1) から，$\overline{c}$ を $\overline{a}, \overline{b}, m$ で表せ．

(1) の両辺の共役複素数をとると，

$$\overline{c} = \overline{(1-m)a + mb} \quad \text{かつ} \quad 1 < m \quad \Leftrightarrow \quad \overline{c} = \overline{(1-m)}\,\overline{a} + \overline{m}\overline{b} \quad \text{かつ} \quad 1 < m$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\overline{c} = (1-m)\overline{a} + m\overline{b}} \quad \textbf{かつ} \quad \boldsymbol{1 < m} \qquad \leftarrow \because m \text{ は実数であるから，} \overline{m} = m$$

(3)　線分 OC が∠AOB の外角の二等分線という条件について，偏角 arg を用いて a, b, c について等式を作れ．

左上図から，$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COA}'$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\arg \dfrac{c}{b} = \arg \dfrac{-a}{c}}$

(4)　(3) の等式から絶対値を利用して変形すると，$\dfrac{c^2}{|c|^2} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$ を埋めよ．

$$\arg \frac{c}{b} = \arg \frac{-a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{|c|} \cdot \frac{|b|}{b} = \frac{-a}{|a|} \cdot \frac{|c|}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{|c|^2} = \boldsymbol{\frac{-ab}{|a||b|}}$$

(5)　$|z|^2 = z\overline{z}$ であるから，(4) から絶対値 $|c|^2$ を消去すると，$\dfrac{c}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$ を埋めよ．

$$\frac{c^2}{|c|^2} = \frac{ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{c\overline{c}} = \frac{ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{c}{\overline{c}} = \frac{-ab}{|a||b|}}$$

(6)　(1), (2) を用いて，(5) から $c, \overline{c}$ を消去し，m について解け．

$$\frac{c}{\overline{c}} = \frac{-ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad |a||b|c = -ab\overline{c}$$

$$\Rightarrow \quad |a||b|\{(1-m)a + mb\} = -ab\left\{(1-m)\overline{a} + m\overline{b}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m = \frac{|a||b|a + ab\overline{a}}{|a||b|(a-b) + ab(\overline{a}-\overline{b})}}$$

(7)　$\dfrac{m}{m-1}$ を a, b で表せ．

(6) から　$m - 1 = \dfrac{|a||b|b + ab\overline{b}}{|a||b|(a-b) + ab(\overline{a}-\overline{b})}$

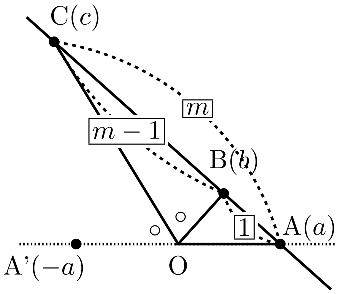
$$\therefore \quad \frac{m}{m-1} = \frac{ab\overline{a} + |a||b|a}{|a||b|b + ab\overline{b}} = \frac{|a|^2 b + |a||b|a}{|a||b|b + a|b|^2} = \frac{|a|(|a|b + |b|a)}{|b|(|a|b + |b|a)} = \boldsymbol{\frac{|a|}{|b|}}$$

☆ (6) 別解　もっと簡単にできる．できた方は次のページ参照．できなかった方はそれを考えながら次のページの問題へ．

★ **外角の二等分線と線分比** の関係についての証明である．
☆ 0 で割る可能性について言及していないので，証明として不完全である．

2. 　複素平面上に OAB があり，OC が∠AOB の外角の二等分線となるように直線 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．

OA : OB = AC : BC を証明せよ．また例外条件についても言え．　　（ S 級 11 分、A 級 16 分、B 級 22 分、C 級 30 分 ）



OA > OB のとき，C は A, B と一致することはないので，

$1 < m$ を用いて，CA : CB $= m : (m-1)$ とおけば，

$$c = (1-m)a + mb \quad \cdots ①$$

$$\overline{c} = \overline{(1-m)a + mb} = (1-m)\overline{a} + m\overline{b} \quad \cdots ②$$

OA > OB より，線分 OC が∠AOB の外角の二等分線になるためには，

左図のように O に関する A の対称点 A$'(-a)$ を考えて，

$$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COA'} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\frac{c}{b} = \arg\frac{-a}{c}$$

A, B, C は原点 O と不一致だから，a, b, c ならびにその共役複素数，絶対値全て 0 ではないので，

$$\arg\frac{c}{b} = \arg\frac{-a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{\overline{c}} = \frac{-ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad |a||b|c = -ab\overline{c}$$

①, ②を代入して，

$$\begin{aligned}
&|a||b|\{(1-m)a + mb\} = -ab\left\{(1-m)\overline{a} + m\overline{b}\right\} \\
\Leftrightarrow\ &\left\{|a||b|(b-a) + ab(\overline{b} - \overline{a})\right\} m = -ab\overline{a} - |a||b|a \\
\Leftrightarrow\ &\left(|a||b|b - |a||b|a + ab\overline{b} - ab\overline{a}\right) m = -|a|\left(|b|a + |a|b\right) \\
\Leftrightarrow\ &\left(|a||b|b - |a||b|a + |b|^2 a - |a|^2 b\right) m = -|a|\left(|b|a + |a|b\right) \\
\Leftrightarrow\ &\{|b|(|a|b + |b|a) - |a|(|a|b + |b|a) -\}\, m = -|a|\left(|b|a + |a|b\right) \\
\Leftrightarrow\ &(|b| - |a|)(|a|b + |b|a)\, m = -|a|\left(|b|a + |a|b\right) \\
\Leftrightarrow\ &(|a| - |b|)(|b|a + |a|b)\, m = |a|\left(|b|a + |a|b\right) \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

$|b|a + |a|b = 0$ を仮定する．a, b, c ならびにその共役複素数，絶対値全て 0 ではないから，

$$|b|a + |a|b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = -\frac{|a|}{|b|}$$

右辺が実数であるから，$\dfrac{a}{b}$ も実数になるが，O, A, B は一直線に並ばないので矛盾である．　←☆ 1

すなわち背理法から，　$|b|a + |a|b \neq 0 \quad \cdots ④$

また OA > OB から，$|a| - |b| > 0. \quad \cdots ⑤$

③, ④, ⑤から　$m = \dfrac{|a|}{|a| - |b|} \quad \Rightarrow \quad m - 1 = \dfrac{|b|}{|a| - |b|}$

$\therefore \quad m : (m-1) = |a| : |b| \quad \Leftrightarrow \quad$ OA : OB = AC : BC

OA < OB のときは半直線 BA 上に C があり，O に関する B の対称点 B$'(-b)$ を考えて，

$$\angle \mathrm{B'OC} = \angle \mathrm{COA} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\frac{c}{-b} = \arg\frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad |a||b|c = -ab\overline{c}$$

よって他も同様にして，OA : OB = AC : BC が導ける．

例外は **OA = OB のとき**．外角の二等分線が直線 AB に平行になり C が存在しない．

これは，③, ④ かつ $|a| = |b|$ から，m が存在しないことからもわかる．

☆ 1 　ここのイメージがすぐ浮かばないのであれば，以下の反射テストをすべし．

複素平面 角度表現・複素平面 直線〜平行垂直・複素平面 直線〜2 点

☆総評 **★ 全てを考える．★ 例外を愛せ・慈しめ．**

0 で割る可能性について言及するとこんな証明になる．m が約分できて非常にシンプルになることは，前ページででふれなかったが，「複素平面 証明〜内角の二等分線」と同様である．

★ 外角の二等分線の長さ　①と $m, (1-m)$ の式から次の公式も得る．

$$|c| = \frac{|-|b|a + |a|b|}{||a| - |b||}$$