反射テスト　複素平面　証明　内角の二等分線と線分比　01

1.　複素平面上に $\triangle$OAB があり，OC が$\angle$AOB の二等分線となるように線分 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．式変形において，**0 で割る可能性** を言う必要はない．

（ S 級 7 分、A 級 12 分、B 級 18 分、C 級 25 分 ）

(1)　実数 x を用いて，$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=x:(1-x)$ とおく．c を a,b,x で表せ．C は A, B と一致することはないものとする．

(2)　(1) から，$\overline{c}$ を $\overline{a}$, $\overline{b}$, x で表せ．

(3)　線分 OC が$\angle$AOB の二等分線という条件について，偏角 arg を用いて a,b,c について等式を作れ．

(4)　(3) の等式から絶対値を利用して変形すると，$\dfrac{c^2}{|c|^2}=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$を埋めよ．

(5)　$|z|^2=z\overline{z}$ であるから，(4) から絶対値 $|c|^2$を消去すると，$\dfrac{c}{\boxed{}}=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$を埋めよ．

(6)　(1), (2) を用いて，(5) から $c,\overline{c}$ を消去し，x について解け．

(7)　$\dfrac{x}{1-x}$ を a,b で表せ．

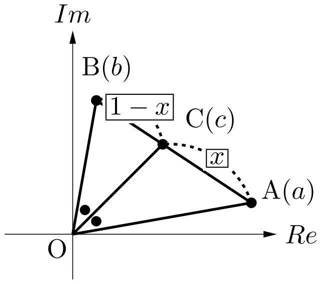
2. 　複素平面上に $\triangle$OAB があり，OC が$\angle$AOB の二等分線となるように線分 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．

OA : OB = AC : BC を証明せよ．　　　　（ S 級 11 分、A 級 16 分、B 級 22 分、C 級 30 分 ）

反射テスト　複素平面　証明　内角の二等分線と線分比　01　解答解説

1.　複素平面上に △OAB があり，OC が∠AOB の二等分線となるように線分 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．式変形において，**0 で割る可能性** を言う必要はない．

（ S 級 7 分、A 級 12 分、B 級 18 分、C 級 25 分 ）



(1)　実数 x を用いて，AC : CB $= x : (1-x)$ とおく．c を a, b, x で表せ．
C は A, B と一致することはないものとする．

★ **内分点公式**　複素平面の場合も同様である．

$\boldsymbol{c = (1-x)a + xb}$　**ただし** $\boldsymbol{0 < x < 1}$

(2)　(1) から，$\overline{c}$ を $\overline{a}, \overline{b}, x$ で表せ．

(1) の両辺の共役複素数をとると，

$\overline{c} = \overline{(1-x)a + xb}$　かつ　$0 < x < 1$　⇔　$\overline{c} = \overline{(1-x)}\,\overline{a} + \overline{x}\,\overline{b}$　かつ　$0 < x < 1$

⇔　$\boldsymbol{\overline{c} = (1-x)\overline{a} + x\overline{b}}$　**かつ**　$\boldsymbol{0 < x < 1}$　　$\leftarrow \because x$ は実数であるから，$\overline{x} = x$

(3)　線分 OC が∠AOB の二等分線という条件について，偏角 arg を用いて a, b, c について等式を作れ．

$$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{COB} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\arg \frac{c}{a} = \arg \frac{b}{c}}$$

(4)　(3) の等式から絶対値を利用して変形すると，$\dfrac{c^2}{|c|^2} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$ を埋めよ．

$$\arg \frac{c}{a} = \arg \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{|c|} \cdot \frac{|a|}{a} = \frac{b}{|b|} \cdot \frac{|c|}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{|c|^2} = \boldsymbol{\frac{ab}{|a||b|}}$$

(5)　$|z|^2 = z\overline{z}$ であるから，(4) から絶対値 $|c|^2$ を消去すると，$\dfrac{c}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ となる．$\boxed{}$ を埋めよ．

$$\frac{c^2}{|c|^2} = \frac{ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{c\overline{c}} = \frac{ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{\boldsymbol{\overline{c}}} = \boldsymbol{\frac{ab}{|a||b|}}$$

(6)　(1), (2) を用いて，(5) から $c, \overline{c}$ を消去し，x について解け．

$$\frac{c}{\overline{c}} = \frac{ab}{|a||b|} \quad \Leftrightarrow \quad |a||b|c = ab\overline{c}$$

$$\Rightarrow \quad |a||b|\{(1-x)a + xb\} = ab\left\{(1-x)\overline{a} + x\overline{b}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{ab\overline{a} - |a||b|a}{|a||b|(b-a) - ab(\overline{b} - \overline{a})}}$$

(7)　$\dfrac{x}{1-x}$ を a, b で表せ．

(6) から　$1 - x = \dfrac{|a||b|b - ab\overline{b}}{|a||b|(b-a) - ab(\overline{b} - \overline{a})}$

$$\therefore \quad \frac{x}{1-x} = \frac{ab\overline{a} - |a||b|a}{|a||b|b - ab\overline{b}} = \frac{|a|^2 b - |a||b|a}{|a||b|b - a|b|^2} = \frac{|a|(|a|b - |b|a)}{|b|(|a|b - |b|a)} = \boldsymbol{\frac{|a|}{|b|}}$$

☆ (6) 別解　もっと簡単にできる．できた方は次のページ参照．できなかった方はそれを考えながら次のページの問題へ．

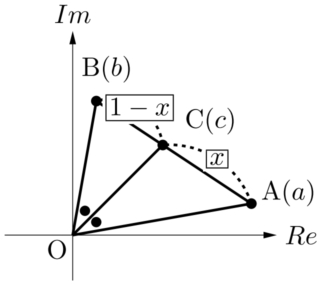
★ **内角の二等分線と線分比** の関係についての証明である．

$\dfrac{|c-a|}{|c-b|}$ について考えると猥雑になるため，こんな証明方法になった．

☆ 0 で割る可能性について言及していないので，証明として不完全である．

2. 　複素平面上に △OAB があり，OC が∠AOB の二等分線となるように線分 AB 上に点 C をおく．O は原点，他の点は小文字のアルファベットで複素数を表し，z の共役複素数を $\overline{z}$ の形で表す．

OA : OB = AC : BC を証明せよ． （ S 級 11 分、A 級 16 分、B 級 22 分、C 級 30 分 ）



C は A, B と一致することはないので，
実数 x に対して，AC : CB $= x : (1-x)$ とおけば，

$$c = (1-x)a + xb \quad \cdots①$$
$$\overline{c} = \overline{(1-x)a + xb}$$
$$= \overline{(1-x)}\,\overline{a} + \overline{x}\overline{b}\overline{c}$$
$$= (1-x)\overline{a} + x\overline{b} \quad \cdots②$$

線分 OC が∠AOB の二等分線であり，A, B, C は原点 O と不一致だから，
a, b, c ならびにその共役複素数，絶対値全て 0 ではない．

$$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{COB} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\frac{c}{a} = \arg\frac{b}{c}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{|c|}\cdot\frac{|a|}{a} = \frac{b}{|b|}\cdot\frac{|c|}{c}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{|c|^2} = \frac{ab}{|a||b|}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{\overline{c}} = \frac{ab}{|a||b|}$$
$$\Leftrightarrow \quad |a||b|c = ab\overline{c}$$

①, ②を代入して，

$$|a||b|\{(1-x)a + xb\} = ab\left\{(1-x)\overline{a} + x\overline{b}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{|a||b|(b-a) - ab(\overline{b}-\overline{a})\right\}x = |a|(|a|b - |b|a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(|a||b|b - |a||b|a - ab\overline{b} + ab\overline{a}\right)x = |a|(|a|b - |b|a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(|a||b|b - |a||b|a - |b|^2a + |a|^2b\right)x = |a|(|a|b - |b|a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(|a|^2b - |a||b|a + |a||b|b - |b|^2a\right)x = |a|(|a|b - |b|a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \{|a|(|a|b - |b|a) + |b|(|a|b - |b|a)\}x = |a|(|a|b - |b|a)$$
$$\Leftrightarrow \quad (|a| + |b|)(|a|b - |b|a)x = |a|(|a|b - |b|a) \quad \cdots③$$

$|a|b - |b|a = 0$ を仮定する．a, b, c ならびにその共役複素数，絶対値全て 0 ではないから，

$$|a|b - |b|a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

右辺が実数であるから，$\dfrac{a}{b}$ も実数になるが，O, A, B は一直線に並ばないので矛盾である． ←☆1
すなわち背理法から， $|a|b - |b|a \neq 0 \quad \cdots④$

また題意から O, A, B は一致しないから，$|a|, |b|$ も 0 ではない．つまり $|a| + |b| \neq 0 \quad \cdots⑤$

③, ④, ⑤から $\quad x = \dfrac{|a|}{|a| + |b|} \quad \Rightarrow \quad 1 - x = \dfrac{|b|}{|a| + |b|}$ （ ☆実はここから $0 < x < 1$ がわかる ）

$\therefore \quad x : (1-x) = |a| : |b| \quad \Leftrightarrow \quad$ OA : OB = AC : BC

☆1 　ここのイメージがすぐ浮かばないのであれば，以下の反射テストをすべし．
複素平面 角度表現・複素平面 直線～平行垂直・複素平面 直線～2 点

☆総評 **★ 全てを考える．★ 例外を愛せ・慈しめ．**
0 で割る可能性について言及するとこんな証明になる．x が約分できて非常にシンプルになることは，前ページではあえて言わなかったが，ここまで導ければ完璧である．

★ 内角の二等分線の長さ 　①と $x, (1-x)$ の式から次の公式も得る．この公式も複素数での表記が美しい．

$$|c| = \frac{||b|a + |a|b|}{|a| + |b|}$$