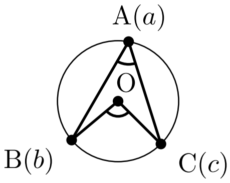
反射テスト　複素平面　証明　円周角の定理　01

1.　複素平面上に，中心が原点 O(0)，半径が 1 の単位円を考え，その円周上に 3 点 A(a), B(b), C(c) をおく．

（ S 級 2 分 35 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 9 分 ）



(1)　∠BAC を複素数 a, b, c で表したい．$\boxed{}$ をうめよ．

$$\arg \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - a}$$

(2)　∠BOC を複素数 b, c で表したい．$\boxed{}$ をうめよ．

$$\arg \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

(3)　(1), (2) を用いて，円周角の定理「同じ弧の円周角は中心角の大きさの半分である」を証明したい．$\boxed{}$ をうめよ．

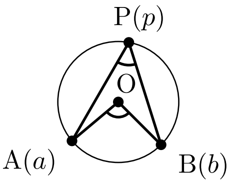
a, b, c は単位円周上にあるから，$|a| = |b| = |c| = \boxed{}$

よって，$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = \boxed{}$

$$\begin{aligned}
2\angle\mathrm{BAC} &= 2\arg \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\
&= \arg \left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \right)^2 \\
&= \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{\overline{a}-\overline{c}}{\boxed{}} \cdot \frac{\boxed{}}{\overline{a}-\overline{b}} \right) \qquad \because\ a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1 \\
&= \arg \left(\frac{(c-a)(\overline{c}-\overline{a})\overline{b}}{(a-b)(\overline{a}-\overline{b})\overline{c}} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\left| \boxed{} \right|^2 \overline{b}}{\left| \boxed{} \right|^2 \overline{c}} \right) \\
&= \arg \frac{\boxed{}}{\overline{c}} \qquad \because\ \text{偏角は絶対値によらない} \\
&= \arg \frac{\boxed{}}{b} \\
&= \angle\mathrm{BOC}
\end{aligned}$$

2. 複素平面上に，中心が原点 O(0)，半径が 1 の単位円を考え，その円周上に 3 点 A(a), B(b), P(p) をおく．

（ S 級 3 分 20 秒、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 10 分 ）



(1) ∠APB を複素数 a, b, p で表せ．

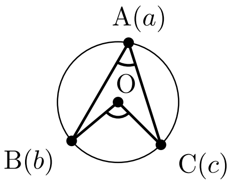
(2) ∠AOB を複素数 a, b で表せ．

(3) (1), (2) を用いて，円周角の定理「同じ弧の円周角は中心角の大きさの半分である」を証明したい．

反射テスト　複素平面　証明　円周角の定理　01　解答解説

1. 複素平面上に，中心が原点 O(0)，半径が 1 の単位円を考え，その円周上に 3 点 A(a), B(b), C(c) をおく．

（ S 級 2 分 35 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 9 分 ）



☆偏角の計算については以下を参照.
[複素平面 偏角 01]

(1) ∠BAC を複素数 a, b, c で表したい. $\boxed{}$ をうめよ.

$$\arg \frac{\boxed{\boldsymbol{c}} - \boxed{\boldsymbol{a}}}{\boxed{\boldsymbol{b}} - a}$$

(2) ∠BOC を複素数 b, c で表したい. $\boxed{}$ をうめよ.

$$\arg \frac{\boxed{\boldsymbol{c}}}{\boxed{\boldsymbol{b}}}$$

(3) (1), (2) を用いて，円周角の定理「同じ弧の円周角は中心角の大きさの半分である」を証明したい. $\boxed{}$ をうめよ.

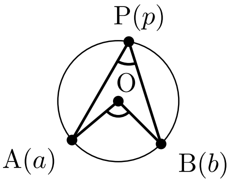
a, b, c は単位円周上にあるから，$|a| = |b| = |c| = \boxed{\boldsymbol{1}}$

よって，$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = \boxed{\boldsymbol{1}}$

$$\begin{aligned}
2\angle\mathrm{BAC} &= 2\arg \frac{\boxed{\boldsymbol{c - a}}}{\boxed{\boldsymbol{b - a}}} \\
&= \arg \left(\frac{\boxed{\boldsymbol{c - a}}}{\boxed{\boldsymbol{b - a}}} \right)^2 \\
&= \arg \left(\frac{c - a}{b - a} \cdot \frac{\frac{1}{\overline{c}} - \frac{1}{\overline{a}}}{\frac{1}{\overline{b}} - \frac{1}{\overline{a}}} \right) && \because\ a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1 \\
&= \arg \left(\frac{c - a}{b - a} \cdot \frac{\bar{a} - \bar{c}}{\boxed{\boldsymbol{\overline{ca}}}} \cdot \frac{\boxed{\boldsymbol{\bar{b}\bar{a}}}}{\bar{a} - \bar{b}} \right) \\
&= \arg \left(\frac{(c - a)(\bar{c} - \bar{a})\bar{b}}{(a - b)(\bar{a} - \bar{b})\bar{c}} \right) \\
&= \arg \left(\frac{\left| \boxed{\boldsymbol{c - a}} \right|^2 \bar{b}}{\left| \boxed{\boldsymbol{a - b}} \right|^2 \bar{c}} \right) \\
&= \arg \frac{\boxed{\boldsymbol{\bar{b}}}}{\bar{c}} && \because\ \text{偏角は絶対値によらない} \\
&= \arg \frac{bc\bar{b}}{bc\bar{c}} \\
&= \arg \frac{c|b|^2}{b|c|^2} \\
&= \arg \frac{\boxed{\boldsymbol{c}}}{b} && \because\ \text{偏角は絶対値によらない} \\
&= \angle\mathrm{BOC}
\end{aligned}$$

2. 複素平面上に，中心が原点 O(0)，半径が 1 の単位円を考え，その円周上に 3 点 A(a), B(b), P(p) をおく．

（ S 級 3 分 20 秒、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 10 分 ）



(1) ∠APB を複素数 a, b, p で表せ．

$$\boldsymbol{\arg \frac{b-p}{a-p}}$$

(2) ∠AOB を複素数 a, b で表せ．

$$\boldsymbol{\arg \frac{b}{a}}$$

(3) (1), (2) を用いて，円周角の定理「同じ弧の円周角は中心角の大きさの半分である」を証明せよ．

a, b, p は単位円周上にあるから，$|a| = |b| = |p| = 1$
よって，$a\overline{a} = b\overline{b} = p\overline{p} = 1$

$$\begin{aligned}
2\angle\mathrm{APB} &= 2\arg\frac{b-p}{a-p} \\
&= \arg\left(\frac{b-p}{a-p}\right)^2 \\
&= \arg\left(\frac{b-p}{a-p}\cdot\frac{b-p}{a-p}\right) \\
&= \arg\left(\frac{b-p}{a-p}\cdot\frac{\frac{1}{\overline{b}}-\frac{1}{\overline{p}}}{\frac{1}{\overline{a}}-\frac{1}{\overline{p}}}\right) && \because\ a\overline{a} = b\overline{b} = p\overline{p} = 1 \\
&= \arg\left(\frac{b-p}{a-p}\cdot\frac{\overline{p}-\overline{b}}{\overline{b}\overline{p}}\cdot\frac{\overline{a}\overline{p}}{\overline{p}-\overline{a}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{(b-p)(\overline{b}-\overline{p})\overline{a}}{(p-a)(\overline{p}-\overline{a})\overline{b}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{|b-p|^2\overline{a}}{|p-a|^2\overline{b}}\right) \\
&= \arg\frac{\overline{a}}{\overline{b}} && \because\ \text{偏角は絶対値によらない} \\
&= \arg\frac{ab\overline{a}}{ab\overline{b}} \\
&= \arg\frac{b|a|^2}{a|b|^2} \\
&= \arg\frac{b}{a} && \because\ \text{偏角は絶対値によらない} \\
&= \angle\mathrm{AOB}
\end{aligned}$$