反射テスト　複素平面　証明　三角不等式　01

1.　あらゆる複素数 z に対して，$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ を証明し，等号条件も求めたい．$\boxed{}$ をうめよ．$\mathrm{Re}\, z$ は $z = x + yi$ (i は虚数単位) のときの実部である実数 x を表す．また必要なら，$z = x + yi$ の虚部である実数 y を表す $\mathrm{Im}\, z$ を使ってよい．

(S 級 1 分 30 秒、A 級 2 分 20 秒、B 級 4 分、C 級 6 分)

証明

Re , $|z|$ 共に実数である．

$\mathrm{Re}\, z < 0$ のとき，不等式の右辺は $\boxed{}$ 以上であるから，不等式は成立．等号を満たすことはない．

$\mathrm{Re}\, z \geqq 0$ のとき，両辺とも $\boxed{}$ 以上であるから平方差で大小関係がわかる．

$$\mathrm{Re}\, z \leqq |z| \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 - (\mathrm{Re}\, z)^2 \geqq 0$$

$$\begin{aligned}|z|^2 - (\mathrm{Re}\, z)^2 &= z \cdot \boxed{} - \left(\frac{\boxed{}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\left(\boxed{}\right)^2}{4} \\ &= \left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^2 \\ &= (\mathrm{Im}\, z)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

以上から，$\mathrm{Re}\, z \geqq 0$ のときも，$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$

等号条件は，

$\mathrm{Re}\, z \geqq 0$　かつ　$\mathrm{Im}\, z = 0$　$\Leftrightarrow$　z が非負実数 (0 以上の実数)

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

2. あらゆる複素数 a, b に対して, $|a+b| \leqq |a|+|b|$ を証明し, 等号条件も求めたい. $\boxed{}$ をうめよ. 前ページの $\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ は証明なしで使ってよい.

（ S 級 3 分、A 級 4 分 20 秒、B 級 6 分、C 級 8 分 ）

証明

両辺が 0 以上であるから, 平方差をとる.

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}^2 - \text{左辺}^2 &= (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\
&= \left(|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2\right) - (a+b)\overline{(\boxed{})} \\
&= \left(a\overline{a} + 2\sqrt{\boxed{}} + b\overline{b}\right) - \left(a\overline{a} + a\overline{b} + \overline{a}b + b\overline{b}\right) \\
&= 2\sqrt{\left(\boxed{}\right)\left(\overline{a\overline{b}}\right)} - \left(\boxed{} + a\overline{b}\right) \\
&= 2\left(\left|\boxed{}\right| - \frac{\boxed{} + \overline{a\overline{b}}}{2}\right) \\
&= 2\left\{\left|\boxed{}\right| - \mathrm{Re}\left(\boxed{}\right)\right\} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$z = a\overline{b}$ と考えれば, 前ページの証明から, $\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ より,

$\mathrm{Re}\,(a\overline{b}) \leqq |a\overline{b}| \quad \Leftrightarrow \quad |a\overline{b}| - \mathrm{Re}\,(a\overline{b}) \geqq 0$

よって, ①は 0 以上となり, 題意は示された.

任意の複素数 a, b に対して, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

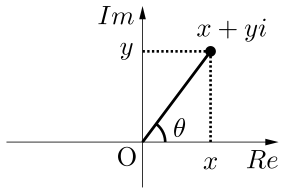
等号条件は前ページから, $a\overline{b}$ が非負実数のとき.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　複素平面　証明　三角不等式　01　解答解説

1.　あらゆる複素数 z に対して，$\mathrm{Re}\,z \leqq |z|$ を証明し，等号条件も求めたい．$\boxed{}$ をうめよ．$\mathrm{Re}\,z$ は $z=x+yi$ (i は虚数単位) のときの実部である実数 x を表す．また必要なら，$z=x+yi$ の虚部である実数 y を表す $\mathrm{Im}\,z$ を使ってよい．

（ S 級 1 分 30 秒、A 級 2 分 20 秒、B 級 4 分、C 級 6 分 ）



まずは知識事項．左図における x が実部，y が虚部である．

★ **複素数 z の実部 (*real part*)**　$\mathbf{Re}\,z$ もしくは $\Re z$ と表す．
　複素数 z の虚部 (*imaginary part*)　$\mathbf{Im}\,z$ もしくは $\Im z$ と表す．

複素数 $z=x+yi$ (i は虚数単位，x, y は実数) が与えられれば，$\mathrm{Re}\,z=x$，$\mathrm{Im}\,z=y$ である．

★ **共役複素数**　$z=x+yi \iff \overline{z}=x-yi$

よって次の公式が導かれる．★ **実部**　$\mathbf{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$　　★ **虚部**　$\mathbf{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

どんな複素数 z に対しても，★ $z+\overline{z}$ は実数．★ $z-\overline{z}$ は純虚数．

★ **絶対値の公式**　$|z|^2 = z\overline{z}$

証明

Re, $|z|$ 共に実数である．

$\mathrm{Re}\,z<0$ のとき，不等式の右辺は $\boxed{0}$ 以上であるから，不等式は成立．等号を満たすことはない．

$\mathrm{Re}\,z \geqq 0$ のとき，両辺とも $\boxed{0}$ 以上の実数であるから平方差で大小関係がわかる．

$\mathrm{Re}\,z \leqq |z| \iff |z|^2-(\mathrm{Re}\,z)^2 \geqq 0$

$$
\begin{aligned}
|z|^2-(\mathrm{Re}\,z)^2 &= z\cdot\boxed{\overline{z}}-\left(\frac{\boxed{z+\overline{z}}}{2}\right)^2\\
&= z\overline{z}-\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\\
&= -\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\\
&= -\frac{\left(\boxed{z-\overline{z}}\right)^2}{4} \qquad \cdots①\\
&= \frac{(z-\overline{z})^2}{(2i)^2}\\
&= \left(\frac{\boxed{z-\overline{z}}}{\boxed{2i}}\right)^2\\
&= (\mathrm{Im}\,z)^2 \geqq 0 \qquad \therefore\ \mathrm{Re}\,z \geqq 0 \text{ のときも，} \mathrm{Re}\,z \leqq |z|
\end{aligned}
$$

等号条件は，

$\mathrm{Re}\,z \geqq 0$　かつ　$\mathrm{Im}\,z=0 \iff z$ が非負実数 (0 以上の実数)

☆ ①をみて，0 以下と考えてはいけない．★ $(z-\overline{z})$ は純虚数である．

別解 1　上の証明は実は回りくどい．$z=x+yi$ を用いればとても簡単である．途中だけ示す．

$|z|^2-(\mathrm{Re}\,z)^2 = x^2+y^2-x^2=y^2 \geqq 0$　($\because$ y は実数)

別解 2　複素平面上で複素数 z を考える．

z が実軸，虚軸以外にある場合，斜辺 $|z|$，他の二辺を $|\mathrm{Re}\,z|$，$|\mathrm{Im}\,z|$ となる直角三角形を考えることができる．直角三角形の斜辺は他の二辺より長いので，$|\mathrm{Re}\,z|<|z|$．z が虚軸の部分 (ただし 0 を除く) や，実軸の負の部分にある場合，不等式は成立．z が実軸の 0 以上の部分にある場合，$\mathrm{Re}\,z=|z|$．$\Rightarrow$ 等号条件は，z が非負実数のとき．

© 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

2. あらゆる複素数 a, b に対して，$|a+b| \leqq |a|+|b|$ を証明し，等号条件も求めたい．$\boxed{}$ をうめよ．前ページの $\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ は証明なしで使ってよい．
（S 級 3 分、A 級 4 分 20 秒、B 級 6 分、C 級 8 分）

★ 複素数の三角不等式

任意の複素数 a, b に対して，　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

証明

両辺が 0 以上であるから，平方差をとる．

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}^2-\text{左辺}^2 &= (|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \\
&= \left(|a|^2+2|a||b|+|b|^2\right)-(a+b)\overline{\left(\boxed{\boldsymbol{a+b}}\right)} \\
&= \left(a\bar{a}+2\sqrt{\boxed{\boldsymbol{a\bar{a}b\bar{b}}}}+b\bar{b}\right)-\left(a\bar{a}+a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{b}\right) \\
&= 2\sqrt{\left(\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}\right)\left(\overline{a\bar{b}}\right)}-\left(\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}+\overline{a\bar{b}}\right) \\
&= 2\left(\left|\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}\right|-\frac{\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}+\overline{a\bar{b}}}{2}\right) \\
&= 2\left\{\left|\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}\right|-\mathrm{Re}\left(\boxed{\boldsymbol{a\bar{b}}}\right)\right\} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$z=a\bar{b}$ と考えれば，前ページの証明から，$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ より，

$\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) \leqq |a\bar{b}| \quad \Leftrightarrow \quad |a\bar{b}|-\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) \geqq 0$

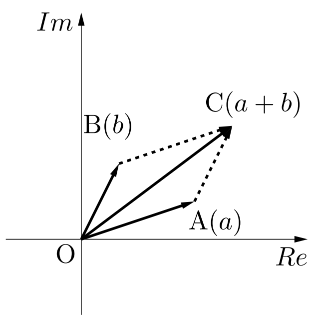
よって，①は 0 以上となり，題意は示された．

　任意の複素数 a, b に対して，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ ．

等号条件は前ページから，$a\bar{b}$ が非負実数のとき．

☆複素平面は回転にも強い．この三角不等式を用いれば，**★ トレミーの不等式** などの証明にも力を発揮する．

別解



★ 複素数の三角不等式

任意の複素数 a, b に対して，　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

複素平面上に $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ を考えて，$(a+b)$ を表す点 C を作る．

四角形 OACB は平行四辺形になり，$\mathrm{AC}=|b|$ である．

△OAC の三辺の長さが，$|a|, |b|, |a+b|$ となり，

三角形の三角不等式と同値であることがわかる．