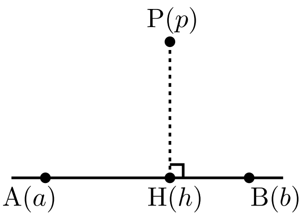
反射テスト　複素平面　証明　三角形の垂線・面積　01

1.　複素平面上に直線ABがあり，その直線上にない点Pがある．点Pから直線ABへ下ろした垂線の足をHとする．点A, B, P, Hを表す複素数をそれぞれ a, b, p, h とする．またそれらの共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{p}, \overline{h}$ とする．

（ S 級 10 分、A 級 12 分 30 秒、B 級 15 分、C 級 18 分 ）



(1)　Hが直線AB上にあることから，h, a, b とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{a}, \overline{b}$ についての方程式を作れ．

(2)　PH ⊥ AB であることから，p, h, a, b とそれらの共役複素数 $\overline{p}, \overline{h}, \overline{a}, \overline{b}$ についての方程式を作れ．

(3)　(1), (2) から $\overline{h}$ を消去し，h について解くと次のようになった．$\boxed{}$ をうめよ．

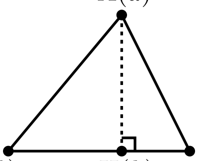
$$h = \frac{p\left(\boxed{}\right) + \overline{p}(\boxed{}) + a\overline{b} - b\overline{a}}{\boxed{}\,(\overline{b} - \overline{a})}$$

(4)　(3) から，$|p-h|$ を求めると次のようになった．$\boxed{}$ をうめよ．

$$\frac{\left|p\left(\boxed{}\right) + a\left(\boxed{}\right) + b\left(\boxed{}\right)\right|}{\boxed{}\,|a-b|}$$

2. 複素平面上に $\triangle$ABC があり，点 A から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とする．点 A, B, C, H を表す複素数をそれぞれ a, b, c, h とする．またそれらの共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{h}$ とする．

（ S 級 10 分、A 級 12 分 30 秒、B 級 15 分、C 級 18 分 ）



(1) H が直線 BC 上にあることから，h, b, c とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{b}, \overline{c}$ についての方程式を作れ.

(2) AH $\perp$ BC であることから，h, a, b, c とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ についての方程式を作れ.

(3) (1), (2) から $\overline{h}$ を消去し，h について解け.

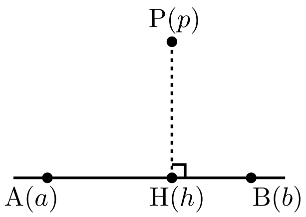
(4) (3) から，$|a-h|$ を求めよ.

(5) $\triangle$ABC の面積を a, b, c とそれらの共役複素数で表せ.

反射テスト　複素平面　証明　三角形の垂線・面積　01　解答解説

1.　複素平面上に直線 AB があり，その直線上にない点 P がある．点 P から直線 AB へ下ろした垂線の足を H とする．点 A, B, P, H を表す複素数をそれぞれ a, b, p, h とする．またそれらの共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{p}, \overline{h}$ とする．

（ S 級 10 分、A 級 12 分 30 秒、B 級 15 分、C 級 18 分 ）



(1)　H が直線 AB 上にあることから，h, a, b とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{a}, \overline{b}$ についての方程式を作れ．

(2)　PH $\perp$ AB であることから，p, h, a, b とそれらの共役複素数 $\overline{p}, \overline{h}, \overline{a}, \overline{b}$ についての方程式を作れ．

(3)　(1), (2) から $\overline{h}$ を消去し，h について解くと次のようになった．$\boxed{}$ をうめよ．

$$h = \frac{p\left(\boxed{}\right) + \overline{p}\left(\boxed{}\right) + a\overline{b} - b\overline{a}}{\boxed{}\left(\overline{b} - \overline{a}\right)}$$

(4)　(3) から，$|p - h|$ を求めると次のようになった．$\boxed{}$ をうめよ．

$$\frac{\left|p\left(\boxed{}\right) + a\left(\boxed{}\right) + b\left(\boxed{}\right)\right|}{\boxed{}\,|a - b|}$$

解答

(1)　題意から，a, b は一致しないので，$a - b \neq 0$

★ **直線**　H が直線 AB 上にある　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{h - a}{b - a} = \dfrac{\overline{h} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}}$

(2)

★ **垂直**　PH $\perp$ AB である　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{p - h}{b - a} + \dfrac{\overline{p} - \overline{h}}{\overline{b} - \overline{a}} = 0}$

(3)

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{h}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{h - a}{b - a} + \frac{\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{h}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{p - h}{b - a} + \frac{\overline{p}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

$$\therefore \quad \frac{h - a}{b - a} + \frac{\overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}} = \frac{p - h}{b - a} + \frac{\overline{p}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2h}{b - a} = \frac{p + a}{b - a} + \frac{\overline{p} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{p + a}{2} + \frac{(b - a)\left(\overline{p} - \overline{a}\right)}{2\left(\overline{b} - \overline{a}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{p\left(\boxed{\boldsymbol{\overline{b} - \overline{a}}}\right) + \overline{p}\left(\boxed{\boldsymbol{b - a}}\right) + a\overline{b} - b\overline{a}}{\boxed{\mathbf{2}}\left(\overline{b} - \overline{a}\right)}$$

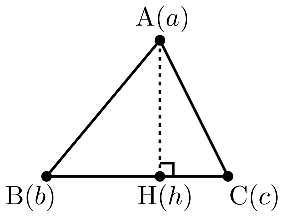
(4)

$$\begin{aligned}
|p - h| &= \left|p - \frac{p\left(\overline{b} - \overline{a}\right) + \overline{p}(b - a) + a\overline{b} - b\overline{a}}{2\left(\overline{b} - \overline{a}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{p\left(\overline{b} - \overline{a}\right) - \overline{p}(b - a) - a\overline{b} + b\overline{a}}{2\left(\overline{b} - \overline{a}\right)}\right| \\
&= \frac{\left|p\left(\boxed{\boldsymbol{\overline{b} - \overline{a}}}\right) + a\left(\boxed{\boldsymbol{\overline{p} - \overline{b}}}\right) + b\left(\boxed{\boldsymbol{\overline{a} - \overline{p}}}\right)\right|}{\boxed{\mathbf{2}}\,|a - b|}
\end{aligned}$$

☆絶対値であるから絶対値内の値が (-1) 倍であっても OK.

2. 複素平面上に $\triangle$ABC があり，点 A から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とする．点 A, B, C, H を表す複素数をそれぞれ a, b, c, h とする．またそれらの共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{h}$ とする．

（ S 級 10 分、A 級 12 分 30 秒、B 級 15 分、C 級 18 分 ）



(1) H が直線 BC 上にあることから，h, b, c とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{b}, \overline{c}$ についての方程式を作れ．

(2) AH $\perp$ BC であることから，h, a, b, c とそれらの共役複素数 $\overline{h}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ についての方程式を作れ．

(3) (1), (2) から $\overline{h}$ を消去し，h について解け．

(4) (3) から，$|a-h|$ を求めよ．

(5) $\triangle$ABC の面積を a, b, c とそれらの共役複素数で表せ．

解答

(1) 題意から，b, c は致しないので，$b-c \neq 0$

★ **直線** H が直線 BC 上にある $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{h-b}{c-b} = \dfrac{\overline{h}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}}}$

(2)

★ **垂直** AH $\perp$ BC である $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\dfrac{h-a}{c-b} + \dfrac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} = 0}$

(3)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\overline{h}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{h-b}{c-b} + \frac{\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\overline{h}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{a-h}{c-b} + \frac{\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}}$$

$$\therefore \frac{h-b}{c-b} + \frac{\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{a-h}{c-b} + \frac{\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2h}{c-b} = \frac{a+b}{c-b} + \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{a+b}{2} + \frac{(c-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{2\left(\overline{c}-\overline{b}\right)}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{a\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + b\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + c\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{2\left(\overline{c}-\overline{b}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{h = \frac{a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) - b\left(\overline{c}-\overline{a}\right) - c\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{2\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}}$$

(4)

$$|a-h| = \left| a - \frac{a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) - b\left(\overline{c}-\overline{a}\right) - c\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{2\left(\overline{b}-\overline{c}\right)} \right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{\left|a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + c\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right|}{2|b-c|}}$$

☆絶対値であるから絶対値内の値が (-1) 倍であっても OK.

(5)

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{|b-c||a-h|}{2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left|a\left(\overline{b}-\overline{c}\right) + b\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + c\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right|}$$

$\cdots$★ **公式** として覚えてもいいだろう．