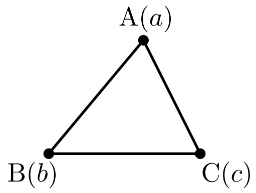
反射テスト　複素平面　証明　三角形の内角・外角　01

1.　複素平面上に $\triangle \mathrm{ABC}$ がある. 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を表す複素数をそれぞれ a, b, c とする.

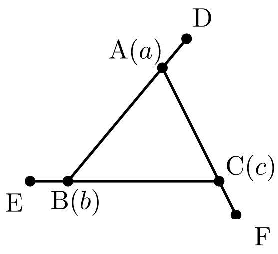
（ S 級 2 分 50 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 8 分 ）



(1)　内角 BAC を a, b, c で表せ.

(2)　(1) を用いて, $\triangle \mathrm{ABC}$ の内角の和が $180°$ であることを証明せよ.

2. 　複素平面上に △ABC があり，下図のように各辺の延長上に点 D, E, F がある．点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ a, b, c とする．
（ S 級 2 分 35 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 8 分 ）



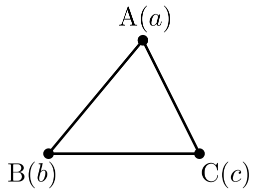
(1)　外角 CAD を a, b, c で表せ.

(2)　(1) を用いて，△ABC の外角の和が 360° であることを証明せよ.

反射テスト　複素平面　証明　三角形の内角・外角　01　解答解説

1.　複素平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ がある. 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を表す複素数をそれぞれ a, b, c とする.

（ S 級 2 分 50 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 8 分 ）



(1)　内角 BAC を a, b, c で表せ.

(2)　(1) を用いて, $\triangle\mathrm{ABC}$ の内角の和が $180°$ であることを証明せよ.

解答

(1)

題意から, a, b, c はどれも一致しないので, $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$

$\angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\arg\dfrac{c-a}{b-a}}$

(2)

$$\begin{aligned}
&\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CBA} + \angle\mathrm{ACB} \\
&= \arg\frac{c-a}{b-a} + \arg\frac{a-b}{c-b} + \arg\frac{b-c}{a-c} \\
&= \arg\frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{b-c}{a-c} \\
&= \arg(-1)
\end{aligned}$$

題意から,

$0 < \angle\mathrm{BAC} < \pi$　かつ　$0 < \angle\mathrm{CBA} < \pi$　かつ　$0 < \angle\mathrm{ACB} < \pi$

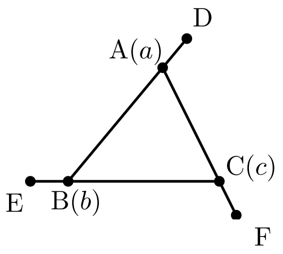
$\Rightarrow$　$0 < \angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CBA} + \angle\mathrm{ACB} < 3\pi$

$\therefore$　$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CBA} + \angle\mathrm{ACB} = \arg(-1) = \pi$

以上から, 三角形の内角の和は $180°$ である.

☆補足　偏角の計算は次を参照. 反射テスト 偏角 01

2. 　複素平面上に △ABC があり，下図のように各辺の延長上に点 D, E, F がある．点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ a, b, c とする．
（ S 級 2 分 35 秒、A 級 4 分、B 級 6 分、C 級 8 分 ）



(1)　外角 CAD を a, b, c で表せ.

(2)　(1) を用いて，△ABC の外角の和が 360°であることを証明せよ.

解答

(1)

題意から，a, b, c はどれも一致しないので，$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$

$\angle \mathrm{CAD} = \boldsymbol{\arg \dfrac{a-b}{c-a}}$

(2)

$$\begin{aligned}
&\angle \mathrm{CAD} + \angle \mathrm{ABE} + \angle \mathrm{BCF} \\
&= \arg \frac{a-b}{c-a} + \arg \frac{b-c}{a-b} + \arg \frac{c-a}{b-c} \\
&= \arg \frac{a-b}{c-a} \cdot \frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{c-a}{b-c} \\
&= \arg 1
\end{aligned}$$

題意から，

$0 < \angle \mathrm{BAC} < \pi$　かつ　$0 < \angle \mathrm{CBA} < \pi$　かつ　$0 < \angle \mathrm{ACB} < \pi$

$\Rightarrow$　$0 < \angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{CBA} + \angle \mathrm{ACB} < 3\pi$

$\therefore$　$\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{CBA} + \angle \mathrm{ACB} = \arg 1 = 2\pi$

以上から，三角形の外角の和は 360°である.