反射テスト　複素平面　複素関数　03

1. $|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，$w=\dfrac{z+1}{z-i}$ とする．w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分 ）

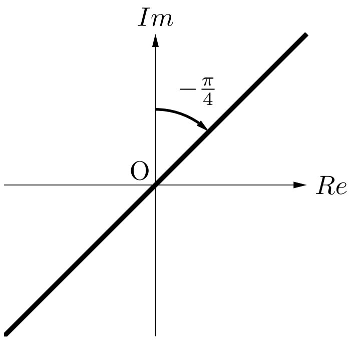
2. $|z| = 1$ で定義される複素数 z に対して，$w = \dfrac{z - \sqrt{3}}{z - i}$ とする．w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

反射テスト　複素平面　複素関数　03　解答解説

1.　$|z| = 1$ で定義される複素数 z に対して，$w = \dfrac{z+1}{z-i}$ とする．w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分 ）



$Re\,(1+i)w = 0$

条件から，$z \neq i$ ．このとき，　$w = \dfrac{z+1}{z-i} \iff z = \dfrac{iw+1}{w-1}$

$|z| = 1$ より，$\left|\dfrac{iw+1}{w-1}\right| = 1$

$\iff |iw+1| = |w-1|$

$\iff (iw+1)\,\overline{(iw+1)} = (w-1)\,\overline{(w-1)}$

$\iff (iw+1)\,(-i\overline{w}+1) = (w-1)\,(\overline{w}-1)$

$\iff w\overline{w} + iw - i\overline{w} + 1 = w\overline{w} - w - \overline{w} + 1$

$\iff (1+i)w + (1-i)\overline{w} = 0$

$\iff \dfrac{(1+i)w + \overline{(1+i)w}}{2} = 0$

$\iff Re\,(1+i)w = 0$

よって，$(1+i)w$ は虚軸上にある．

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，$(1+i)$ 倍は，w の絶対値を$\sqrt{2}$倍して，原点に関して $+\dfrac{\pi}{4}$回転移動するから，

$(1+i)w$ が虚軸上にあるなら，その虚軸を原点に関して，$-\dfrac{\pi}{4}$回転移動したものが w である．

w は複素平面上で虚軸を $-\dfrac{\pi}{4}$回転移動した直線 である．

☆見直し　余裕がなくても $z = -1$ や $z = -i$ くらいは代入してみよう．簡単なミスは防げる．

$|z| = 1$ 上の点を代入してみる．ただし，$z = i$ は定義されていないので除く．

$z = 1 \quad \to \quad w = 1+i$

$z = -1 \quad \to \quad w = 0$

$z = -i \quad \to \quad w = \dfrac{1+i}{2}$

★ 複素解析　1 次変換 (1 次分数変換)

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ の形で表される変換を，複素解析では z の 1 次変換 (1 次分数変換) という．さらに 1 次変換は円を円に移すことが知られている．(2) の像は直線だが，複素平面上の直線は無限遠 ∞ (この問題の場合なら，$z = i$ のときの $w = \infty$.) を考えれば，くるりと回ることができ, 半径が無限大の円と言える．正確には，複素平面上の直線も円もリーマン球面上の円である．

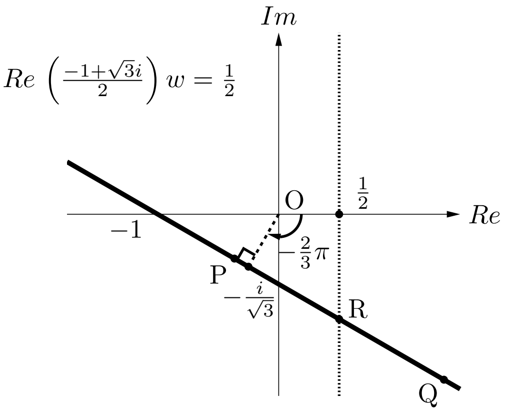
★ 1 次変換と行列

また，1 次変換は行列の変換と同値でもある．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば，逆関数は逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と対応する．例えば (1) で，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ となり，$z = \dfrac{0w+1}{1w-1}$ と対応するので，逆行列を知っていると早く解ける．

さらに，1 次変換を複数回行いたいときも，行列の積で考えれば易しい．

2. $|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，$w=\dfrac{z-\sqrt{3}}{z-i}$ とする．w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）



条件から，$z \neq i$.

このとき，$w=\dfrac{z-\sqrt{3}}{z-i} \iff z=\dfrac{iw-\sqrt{3}}{w-1}$

$|z|=1$ より，$\left|\dfrac{iw-\sqrt{3}}{w-1}\right|=1$

$\iff |w-1|=\left|iw-\sqrt{3}\right|$

$\iff (w-1)\overline{(w-1)}=\left(iw-\sqrt{3}\right)\overline{\left(iw-\sqrt{3}\right)}$

$\iff (w-1)(\overline{w}-1)=\left(iw-\sqrt{3}\right)\left(-i\overline{w}-\sqrt{3}\right)$

$\iff w\overline{w}-w-\overline{w}+1=w\overline{w}-\sqrt{3}iw+\sqrt{3}\,i\overline{w}+3$

$\iff (-1+\sqrt{3}\,i)w+(-1-\sqrt{3}\,i)\overline{w}=2$

$\iff \dfrac{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}w+\overline{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}w}}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\iff Re\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}w\right)=\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}w$ は，実部が $\dfrac{1}{2}$ で虚軸に平行な直線 (左図破線) 上にある．

$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ であるから，$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 倍は，原点に関して $+\dfrac{2}{3}\pi$ の回転移動を意味する．

$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}w$ が虚軸に平行な直線上にあるなら，その直線を原点に関して，$-\dfrac{2}{3}\pi$ 回転移動したものが w である．

w は複素平面上で実部が $\dfrac{1}{2}$ で虚軸に平行な直線を $-\dfrac{2}{3}\pi$ 回転移動した直線 である．

☆見直し　余裕がなくても $z=-i$ くらいは代入してみよう．簡単なミスは防げる．
$|z|=1$ 上の点を代入してみる．ただし，$z=i$ は定義されていないので除く．

$z=1 \to w=\dfrac{1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\,i}{2}$ ⋯図の点 P

$z=-1 \to w=\dfrac{1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\,i}{2}$ ⋯図の点 Q

$z=-i \to w=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ ⋯図の点 R

☆別解
$w=x+yi$ とおいて，上の方程式の変形のどこかで代入する．最後で代入してみると，

$Re\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}w\right)=\dfrac{1}{2}$

$\iff Re\left\{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}(x+yi)\right\}=\dfrac{1}{2}$

$\iff Re\left\{\dfrac{-x-\sqrt{3}y+(\sqrt{3}x-y)i}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$

$\iff \dfrac{-x-\sqrt{3}y}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\iff x+\sqrt{3}\,y+1=0$