反射テスト　複素平面　複素関数　02

1.　$|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 2 分，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

（1）　$w=\dfrac{z+1}{z}$

（2）　$w=\dfrac{z+1}{z-1}$

© 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $|z| = 1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1) $w = \dfrac{z-1}{2z}$

(2) $w = \dfrac{iz-i}{z+1}$

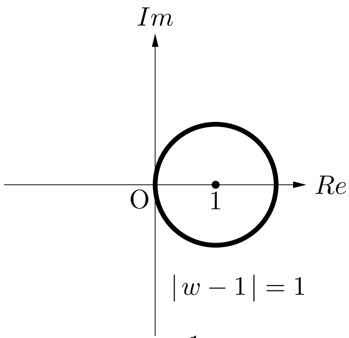
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　複素平面　複素関数　02　解答解説

1.　$|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 2 分，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

(1)　$w=\dfrac{z+1}{z}$



$z=0$ ．これは $|z|=1$ 上にないので，

$w=\dfrac{z+1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{1}{w-1}$

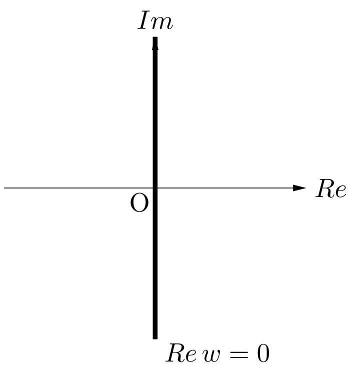
$|z|=1$ より，$\left|\dfrac{1}{w-1}\right|=1$

$\Leftrightarrow \quad |w-1|=1$

よって，**w は中心 1，半径 1 の円** である．

☆別解　$w=1+\dfrac{1}{z}$ である．$|z|=1$ より，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{z\overline{z}}{z}=\overline{z}$ であるから，$\dfrac{1}{z}$ という写像は，$|z|=1$ という中心が原点で半径 1 の円周上の点を，同じ円周上に移す．$1+\dfrac{1}{z}$ より，その円を実軸の正の方向に $+1$ 平行移動すれば良い．

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z-1}$



条件から，$z \neq 1$ ．このとき，　$w=\dfrac{z+1}{z-1} \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{w+1}{w-1}$

$|z|=1$ より，$\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=1$

$\Leftrightarrow \quad |w+1|=|w-1|$

$\Leftrightarrow \quad (w+1)\overline{(w+1)}=(w-1)\overline{(w-1)}$

$\Leftrightarrow \quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=w\overline{w}-w-\overline{w}+1$

$\Leftrightarrow \quad w+\overline{w}=0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{w+\overline{w}}{2}=0$

$\Leftrightarrow \quad Re\, w=0$

よって，**w は複素平面上で虚軸と一致する直線** である．

★ 複素解析　1 次変換 (1 次分数変換)

$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ の形で表される変換を，複素解析では z の 1 次変換 (1 次分数変換) という．さらに 1 次変換は円を円に移すことが知られている．(2) の像は直線だが，複素平面上の直線は無限遠 ∞ ((2) の場合なら，$z=1$ のときの $w=\infty$.) を考えれば，くるりと回ることができ, 半径が無限大の円と言える．正確には，複素平面上の直線も円もリーマン球面上の円である．

★ 1 次変換と行列

また，1 次変換は行列の変換と同値でもある．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば，逆関数は逆行列 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と対応する．例えば (1) で，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，逆行列 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ となり，$z=\dfrac{0w+1}{1w-1}$ と対応するので，逆行列を知っていると早く解ける．

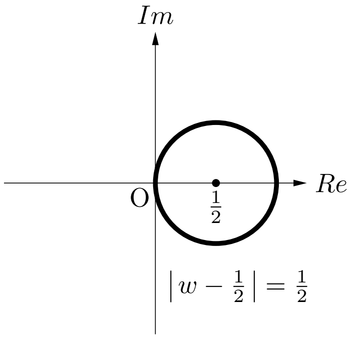
さらに，1 次変換を複数回行いたいときも，行列の積で考えれば易しい．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1) $w=\dfrac{z-1}{2z}$



$z=0$ ．これは $|z|=1$ 上にないので，

$w=\dfrac{z-1}{2z} \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{1}{1-2w}$

$|z|=1$ より，$\left|\dfrac{1}{1-2w}\right|=1$

$\Leftrightarrow \quad \left|w-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，**$\boldsymbol{w}$ は中心 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円** である．

☆別解　$w=-\dfrac{1}{2}\times\overline{z}+\dfrac{1}{2}$ と考えて，以下のように分析する．

写像	内容	像の変遷
$z_1 \to \overline{z_1}$	実軸に関する線対称	中心原点，半径 1 の円
$z_2 \to \frac{1}{2}z_2$	原点を中心に $\frac{1}{2}$ 倍 (縮小)	中心原点，半径 $\frac{1}{2}$ の円
$z_3 \to -z_3$	原点を中心に点対称	中心原点，半径 $\frac{1}{2}$ の円
$z_4 \to z_4+\frac{1}{2}$	実軸方向に $+\frac{1}{2}$ 平行移動	中心 $\frac{1}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円

☆見直し

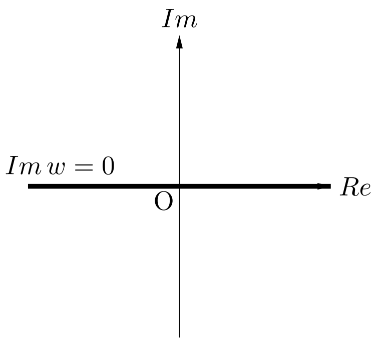
$|z|=1$ 上の点を代入してみる．

$z=1 \quad \to \quad w=0$

$z=-1 \quad \to \quad w=1$

$z=i \quad \to \quad w=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

(2) $w=\dfrac{iz-i}{z+1}$



条件から，$z\neq-1$ ．このとき，$\quad w=\dfrac{iz-i}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z=-\dfrac{w+i}{w-i}$

$|z|=1$ より，$\left|\dfrac{w+i}{w-i}\right|=1$

$\Leftrightarrow \quad |w+i|=|w-i|$

$\Leftrightarrow \quad (w+i)\,\overline{(w+i)}=(w-i)\,\overline{(w-i)}$

$\Leftrightarrow \quad (w+i)\,(\overline{w}-i)=(w-i)\,(\overline{w}+i)$

$\Leftrightarrow \quad w\overline{w}-iw+i\overline{w}+1=w\overline{w}+iw-i\overline{w}+1$

$\Leftrightarrow \quad w-\overline{w}=0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{w-\overline{w}}{2i}=0$

$\Leftrightarrow \quad Im\,w=0$

よって，**$\boldsymbol{w}$ は複素平面上で実軸と一致する直線** である．

☆見直し

$|z|=1$ 上の点を代入してみる．ただし，$z=-1$ は定義されていないので除いて考える．

$z=1 \quad \to \quad w=0$

$z=i \quad \to \quad w=-1$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）