反射テスト　複素平面　複素関数　01

1.　$|z| = 1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

（1）　$w = z + 1$

（2）　$w = 2z$

（3）　$w = iz$

（4）　$w = \dfrac{1}{z}$

2. $|\,z\,| = 1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

（1） $w = z - i$

（2） $w = \dfrac{z}{2}$

（3） $w = \dfrac{z}{i}$

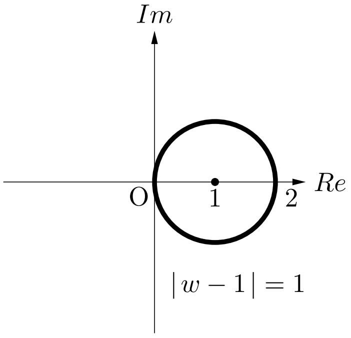
（4） $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$

反射テスト　複素平面　複素関数　01　解答解説

1.　$|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　$w=z+1$



★ **平行移動**

z**+1** だから，

実軸の正の方向に 1 平行移動．

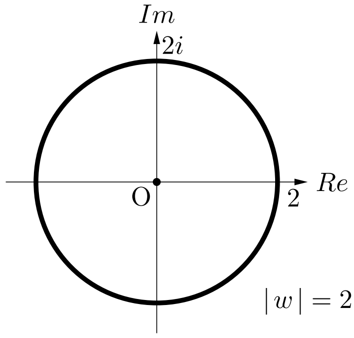
よって，**w は中心 1，半径 1 の円** である．

☆別解　$w=z+1 \quad \Leftrightarrow \quad z=w-1$

$|z|=1$ に代入して，$|w-1|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．

(2)　$w=2z$



★ **拡大・縮小**

z**×2** だから，

z の絶対値が 2 倍になる．

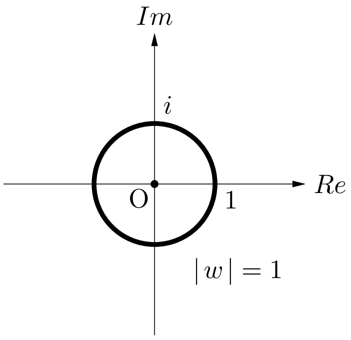
よって，**w は中心を原点とする半径 2 の円** である．

☆別解　$w=2z \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{w}{2}$

$|z|=1$ に代入して，$\left|\dfrac{w}{2}\right|=1 \quad \Leftrightarrow \quad |w|=2$

こちらの方法も必ず出来るように．

(3)　$w=iz$



★ **回転移動**

i 倍は $+\dfrac{\pi}{2}$ の回転移動．

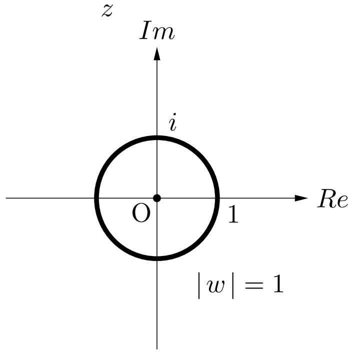
よって，**w は中心を原点とする半径 1 の円** である．

☆別解　$w=iz \quad \Leftrightarrow \quad z=-iw$

$|z|=1$ に代入して，$|-iw|=1 \quad \Leftrightarrow \quad |w|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．

(4)　$w=\dfrac{1}{z}$



条件から，$z\neq 0$. このとき，

$|z|=1 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z}=1$

よって，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{z\overline{z}}{z}=\overline{z}$$

これは実軸に関して★ **線対称** の移動になるから，

w は中心を原点とし，半径 1 の円 である．

☆別解　$w=\dfrac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{1}{w}$

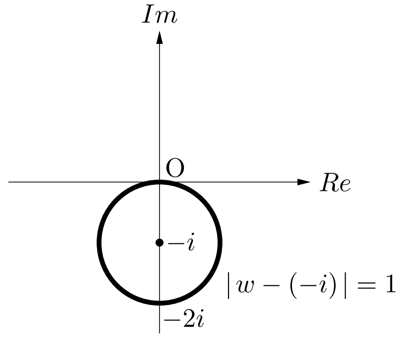
$|z|=1$ に代入して，$\left|\dfrac{1}{w}\right|=1 \quad \Leftrightarrow \quad |w|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．

2. $|z|=1$ で定義される複素数 z に対して，次の w が作る図形を複素平面上に描け．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1) $w=z-i$



★ **平行移動**

$z-\boldsymbol{i}$ だから，

虚軸の負の方向に 1 平行移動．

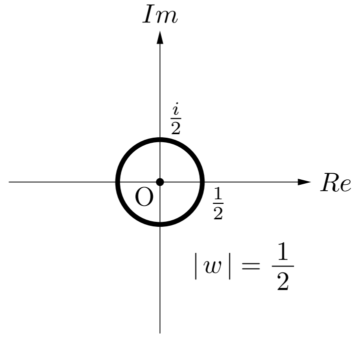
よって，**w は中心 $-i$，半径 1 の円** である．

☆別解　$w=z-i$　⇔　$z=w+i$

$|z|=1$ に代入して，$|w+i|=1$ ⇔ $|w-(-i)|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．

(2) $w=\dfrac{z}{2}$



★ **拡大・縮小**

$z\times\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ だから，

z の絶対値が $\dfrac{1}{2}$ 倍になる．

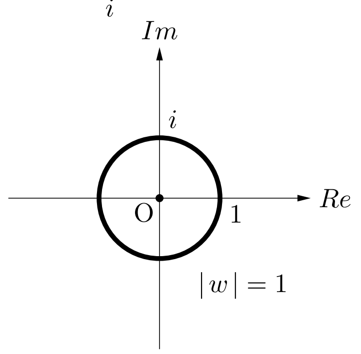
よって，**w は中心を原点とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円** である．

☆別解　$w=\dfrac{z}{2}$　⇔　$z=2w$

$|z|=1$ に代入して，$|2w|=1$　⇔　$|w|=\dfrac{1}{2}$

こちらの方法も必ず出来るように．

(3) $w=\dfrac{z}{i}$



★ **回転移動**

$\dfrac{1}{i}$ 倍は $-\dfrac{\pi}{2}$ の回転移動．

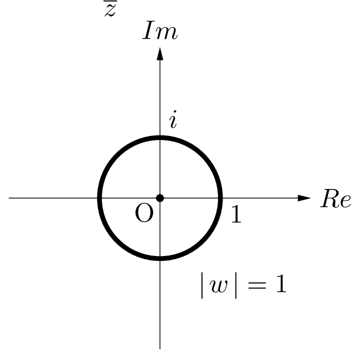
よって，**w は中心を原点とする半径 1 の円** である．

☆別解　$w=\dfrac{z}{i}$　⇔　$z=iw$

$|z|=1$ に代入して，$|iw|=1$　⇔　$|w|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．

(4) $w=\dfrac{1}{z}$



条件から，$z\neq 0$．このとき，

$|z|=1$　⇔　$z\overline{z}=1$

よって，

$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{z\overline{z}}{z}=\overline{z}$

これは★ **恒等変換**．

w は中心を原点とし，半径 1 の円 である．

☆別解　$w=\dfrac{1}{\overline{z}}$　⇔　$z=\dfrac{1}{\overline{w}}$

$|z|=1$ に代入して，

$\left|\dfrac{1}{\overline{w}}\right|=1$　⇔　$|\overline{w}|=1$　⇔　$|w|=1$

こちらの方法も必ず出来るように．