反射テスト　複素平面　領域　03

1.　$\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)>0$ を満たす複素数 z の範囲を複素平面上に描け.

$\overline{z}$ は z の共役複素数を，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば，$z=2+3i \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$.

（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 11 分 ）

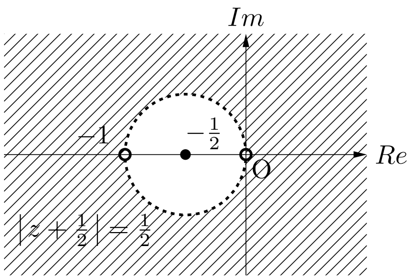
2. $\mathrm{Re}\,\dfrac{z}{1-z} \geqq 0$ を満たす複素数 z の範囲を複素平面上に描け.

$\overline{z}$ は z の共役複素数を, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2+3i \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\,z = 3$.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 11 分)

1.　$\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)>0$ を満たす複素数 z の範囲を複素平面上に描け．
$\overline{z}$ は z の共役複素数を，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す．例えば，$z=2+3i \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ ．

（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 8 分，C 級 11 分 ）



境界は含まない

題意から，$\boldsymbol{z\neq 0} \Leftrightarrow |z|>0$ ．以下この条件で式変形していく．

与不等式

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+\frac{1}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{1}{z}\right)}}{2}>0 \quad \left(\because\ \mathrm{Re}\,z=\tfrac{z+\overline{z}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}>0 \quad \left(\because\ \overline{1}=1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2z\overline{z}+z+\overline{z}}{z\overline{z}}>0 \quad \text{←左辺の通分}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2z\overline{z}+z+\overline{z}>0 \quad \left(\because\ z\overline{z}=|z|^2>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\overline{z}+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\overline{z}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z+\tfrac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\tfrac{1}{2}\right)>\tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\tfrac{1}{2}\right)}>\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|z+\tfrac{1}{2}\right|>\tfrac{1}{2} \quad \text{←中心 } -\tfrac{1}{2}\text{，半径 }\tfrac{1}{2}\text{ の円の外部}$$

☆注意　不等式で複素数を扱うとき，両辺を i で割ったりできない．また両辺が実数であることを常に意識し，それを壊すような移項を避けること．

☆別解 1　素直に (x,y) でする．
実数 x,y を用いて，$z=x+yi$ と表せば，

$1+\frac{1}{z}=1+\frac{1}{x+yi}=1+\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=1+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+x-yi}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{z}$ の実部は，$\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}$

よって，　$\mathrm{Re}\left(1+\frac{1}{z}\right)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}>0$

題意から，　$z\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2>0$　であるから，　$x^2+y^2+x>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$

☆別解 2　以下，$z\neq 0$ とする．

$\mathrm{Re}\left(1+\frac{1}{z}\right)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\mathrm{Re}\,\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{\mathrm{Re}\,\overline{z}}{z\overline{z}}>0 \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z}+\mathrm{Re}\,z>0$
$\Leftrightarrow \quad z\overline{z}+\frac{z}{2}+\frac{\overline{z}}{2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$

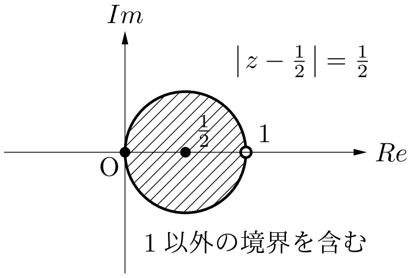
2 番目の式変形では，$\mathrm{Re}\left(1+\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}\,1+\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}=1+\mathrm{Re}\,z$ を用いた．
3 番目の式変形では，$z\overline{z}$ が実数であることから，Re の外に出せることを用いた．
4 番目の式変形では，$z\overline{z}$ が正の実数であることを用いた．

☆実部・虚部の計算については，「反射テスト 複素平面 実部と虚部 02」参照．

2. $\mathrm{Re}\,\dfrac{z}{1-z} \geqq 0$ を満たす複素数 z の範囲を複素平面上に描け.

$\overline{z}$ は z の共役複素数を, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2+3i \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\,z = 3$.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 11 分)



題意から, $1-z \neq 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{z \neq 1}$. 以下この条件で式変形していく.

与不等式

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{z}{1-z} + \overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)}}{2} \geqq 0 \qquad \left(\because\ \mathrm{Re}\,z = \tfrac{z+\overline{z}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} \geqq 0 \qquad (\because\ \overline{1} = 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z(1-\overline{z}) + \overline{z}(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})} \geqq 0 \quad \text{←左辺の通分}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z+\overline{z}-2z\overline{z}}{(1-z)\overline{(1-z)}} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z+\overline{z}-2z\overline{z} \geqq 0 \qquad \left(\because\ (1-z)\overline{(1-z)} = |1-z|^2 > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\overline{z} \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\tfrac{1}{2}\right) \leqq \tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z-\tfrac{1}{2}\right)} \leqq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|z-\tfrac{1}{2}\right| \leqq \tfrac{1}{2} \qquad \text{←中心 } \tfrac{1}{2}\text{, 半径 } \tfrac{1}{2} \text{ の円の内部}$$

☆注意 1　不等式で複素数を扱うとき, 両辺を i で割ったりできない. また両辺が実数であることを常に意識し, それを壊すような移項を避けること.
☆注意 2　$\boldsymbol{z \neq 1}$ を忘れないこと.

☆別解 1　素直に (x, y) でする.
実数 x, y を用いて, $z = x+yi$ と表せば,

$$\frac{z}{1-z} = \frac{x+yi}{1-(x+yi)} = \frac{(x+yi)(1-x+yi)}{(1-x-yi)(1-x+yi)} = \frac{x-x^2-y^2+yi}{(1-x)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{z} \text{ の実部は, } \frac{x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$$

よって, $\mathrm{Re}\,\frac{z}{1-z} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \geqq 0$

題意から, $z \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)^2+y^2 > 0$ であるから, $x-x^2-y^2 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

☆別解 2　$z = 0$ は不等式を満たす. 以下, $z \neq 0, 1$ とする.

$$\mathrm{Re}\,\frac{z}{1-z} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{\frac{1-z}{z}} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{Re}\left(\frac{1-z}{z}\right)}{\left|\frac{1-z}{z}\right|^2} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\frac{1-z}{z} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}-1\right) \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} \geqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\overline{z} \geqq z\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z+\overline{z}}{2} \geqq z\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{z} - \frac{z}{2} - \frac{\overline{z}}{2} \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left|z-\frac{1}{2}\right| \leqq \frac{1}{2}$$

1〜2 番目の式変形は, $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = \mathrm{Re}\,\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\mathrm{Re}\,\overline{z}}{z\overline{z}}$ の応用.
3 番目の式変形は, 両辺に $\left|\frac{1-z}{z}\right|$ をかけてから, $\mathrm{Re}\,\overline{z} = \mathrm{Re}\,z$ の応用.
5 番目の式変形では, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}-1\right) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} - \mathrm{Re}\,1 = \mathrm{Re}\,\frac{1}{z} - 1$ と, 移項を用いた.
6 番目の式変形では, 両辺に正の実数 $z\overline{z}$ を掛けた.