反射テスト　複素平面　領域　02

1. 　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\, z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\, z = 3$ である.　（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

（1）　$-1 \leqq \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z \leqq 1$

（2）　$z \neq 0$ かつ $0 \leqq \arg z \leqq \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\left| z - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \right| \leqq 1$

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である.　（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

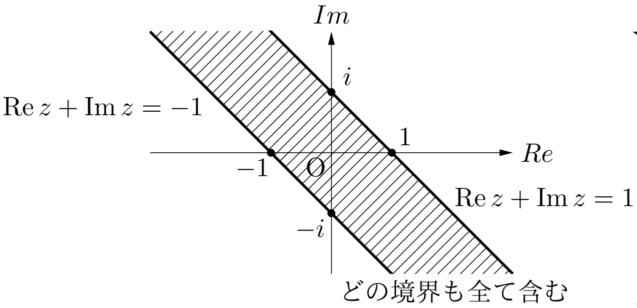
（1） $-1<\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z<1$

（2） $\mathrm{Re}\,z \leqq -1$ かつ $\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg z \leqq \pi$ かつ $\left|z+1-\sqrt{3}i\right| \leqq 2$

反射テスト　複素平面　領域　02　解答解説

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け．$\overline{z}$ は z の共役複素数とし，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す．例えば，$z=2+3i$ であれば，$\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である．　（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　$-1 \leqq \mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z \leqq 1$



★ 複素数の公式　i は虚数単位，$z=x+yi$ のとき，

① $\boldsymbol{x=\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$

② $\boldsymbol{y=\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

③ $\boldsymbol{x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}}$

④ $\boldsymbol{\mathrm{Re}\,\overline{z}=\mathrm{Re}\,z}$

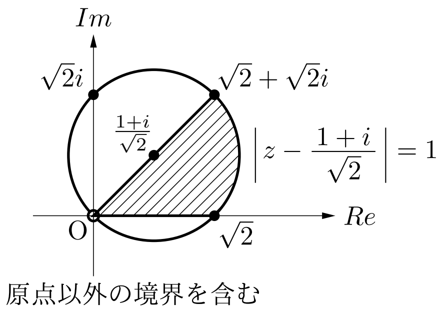
⑤ $\boldsymbol{\mathrm{Im}\,\overline{z}=-\mathrm{Im}\,z}$

以上を利用して，(x,y) について考えれば，
xy 座標平面上の領域として扱うことができる．

与不等式　⇔　$-1 \leqq x+y \leqq 1$

★ 複素平面上の領域
複素数は大小関係がないから，基本的に素のままの z や $\overline{z}$ で不等式を表すことはできない．複素平面上の領域を表す場合，$|z|$，$\arg z$，実部・虚部を表す $\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$ などの実数を用いて不等式を作る．

(2)　$z \neq 0$ かつ $0 \leqq \arg z \leqq \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\left|z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| \leqq 1$



題意から，$\boldsymbol{z \neq 0}$

$\left|z-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right| \leqq 1$ は，中心 $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ，半径 1 の円の内部．

円の中心は，

$$\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$$\arg\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\arg\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

絶対値 1，偏角 45° の点　⇒　円の半径 1 から，原点は円周上．

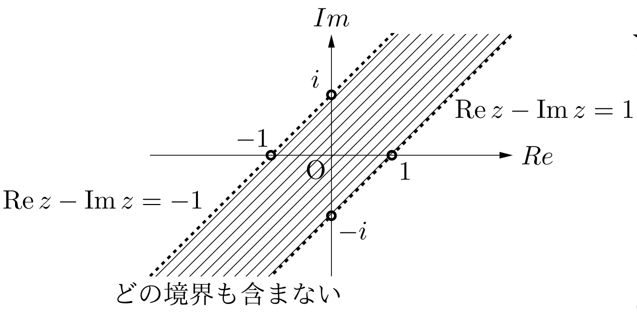
★ 複素平面上の半直線
　実軸に対しての角度 (ラジアン) を傾きと考えれば，傾きと通る点が 1 つ分かれば直線の方程式が得られる．
半直線の起点 (端点)C を複素数 c を用いて表すと，
　傾き θ，起点 $\mathrm{C}(c)$ の半直線の方程式　$\boldsymbol{\arg(z-c)=\theta}$

$\arg z=0$ は正の実軸 ($x>0$ かつ $y=0$) を表す．
$\arg z=\dfrac{\pi}{4}$ は原点を起点とする 傾き 45° の半直線を表す．

円の内部で，この 2 つの直線にはさまれた部分が上図である．

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け．$\overline{z}$ は z の共役複素数とし，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す．例えば，$z=2+3i$ であれば，$\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である． （ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

（1） $-1<\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z<1$



★ **複素数の公式**　i は虚数単位，$z=x+yi$ のとき，

① $\boldsymbol{x=\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$

② $\boldsymbol{y=\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

③ $\boldsymbol{x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}}$

④ $\boldsymbol{\mathrm{Re}\,\overline{z}=\mathrm{Re}\,z}$

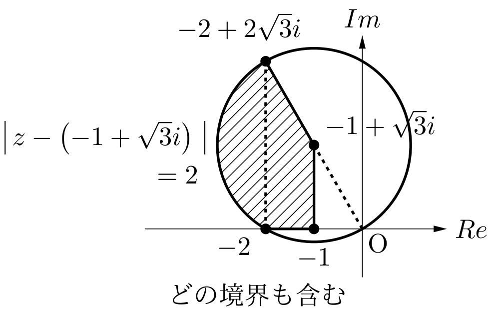
⑤ $\boldsymbol{\mathrm{Im}\,\overline{z}=-\mathrm{Im}\,z}$

以上を利用して，(x,y) について考えれば，
xy 座標平面上の領域として扱うことができる．

与不等式　⇔　$-1\leqq x-y\leqq 1$

★ **複素平面上の領域**
複素数は大小関係がないから，基本的に素のままの z や $\overline{z}$ で不等式を表すことはできない．複素平面上の領域を表す場合，$|z|$，$\arg z$，実部・虚部を表す $\mathrm{Re}\,z$ ，$\mathrm{Im}\,z$ などの実数を用いて不等式を作る．

（2） $\mathrm{Re}\,z\leqq -1$ かつ $\dfrac{2}{3}\pi\leqq\arg z\leqq\pi$ かつ $\left|z+1-\sqrt{3}i\right|\leqq 2$



$\mathrm{Re}\,z\leqq -1$
これは，直線 $\mathrm{Re}\,z=-1$ の左側．

$\left|z+1-\sqrt{3}i\right|=2$
⇔ $\left|z-\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right|=2$
これは，中心 $\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ ，半径 2 の円の内部．

円の中心は，

$$\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$$\arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)=\arg\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\arg\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi$$

絶対値 2，偏角 120° の点　⇒　円の半径 2 から，原点は円周上．

★ **複素平面上の半直線**
　実軸に対しての角度 (ラジアン) を傾きと考えれば，傾きと通る点が 1 つ分かれば直線の方程式が得られる．
半直線の起点 (端点)C を複素数 c を用いて表すと，
　傾き θ ，起点 $\mathrm{C}(c)$ の半直線の方程式　$\boldsymbol{\arg(z-c)=\theta}$

$\arg z=\dfrac{2}{3}\pi$ は原点を起点とする 傾き 120°の半直線を表す．
$\arg z=\pi$ は負の実軸 ($x<0$ かつ $y=0$) を表す．

円の内部で，この 3 つの直線に囲まれた部分が上図である．