反射テスト　複素平面　領域　01

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\,z = 3$ である.　　（ S 級 2 分 40 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\mathrm{Re}\,z > 1$

(2)　$\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} > 0$

(3)　$|\,z\,|^2 \leqq 2$

(4)　$|\,z\,|^2 > \mathrm{Re}\,z$

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\, z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\, z = 3$ である. （ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分 ）

(1) $\mathrm{Im}\, z \leqq 1$

(2) $\mathrm{Im}\, \dfrac{1}{z} > 0$

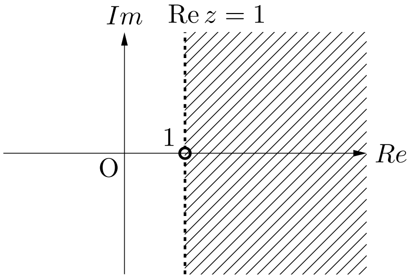
(3) $|\, z\,|^2 \geqq 20$

(4) $|\, z\,|^2 < \mathrm{Im}\, z$

反射テスト　複素平面　領域　01　解答解説

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け．$\overline{z}$ は z の共役複素数とし，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す．例えば，$z=2+3i$ であれば，$\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である．　（ S 級 2 分 40 秒，A 級 3 分 40 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　$\mathrm{Re}\,z>1$



境界は含まない

★ 複素数の公式　i は虚数単位，$z=x+yi$ のとき，

① $\boldsymbol{x=\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$

② $\boldsymbol{y=\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

③ $\boldsymbol{x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}}$

④ $\boldsymbol{\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,\overline{z}}$

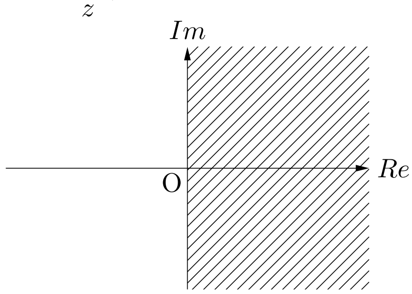
⑤ $\boldsymbol{\mathrm{Im}\,z=-\mathrm{Im}\,\overline{z}}$

以上を利用して，(x,y) について考えれば，
xy 座標平面上の領域として扱うことができる．

与不等式 ⇔ $x>1$

★ 複素平面上の領域
複素数は大小関係がないから，基本的に素のままの z や $\overline{z}$ で不等式を表すことはできない．複素平面上の領域を表す場合，$|z|$，$\arg z$，実部・虚部を表す $\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$ などの実数を用いて不等式を作る．

(2)　$\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z}>0$



境界は含まない

$z\neq0$ かつ $z=x+yi$ ⇔ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

∴ $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z}>0$ ⇔ $\mathrm{Re}\,\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}>0$

⇔ $x>0$

☆別解
$z\neq0$ かつ $z=x+yi$ ⇔ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$

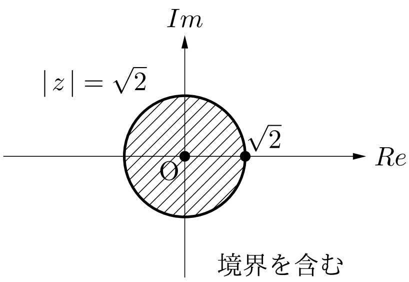
∴ $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z}>0$ ⇔ $\mathrm{Re}\,\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}>0$

⇔ $\mathrm{Re}\,\overline{z}>0$

⇔ $\mathrm{Re}\,z>0$ ←★ 公式④

☆慣れると，x,y に換算せずに，z と $\overline{z}$ のみで考えられる．

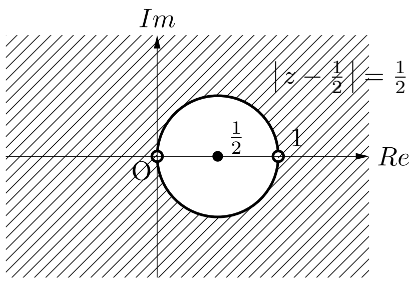
(3)　$|z|^2\leqq2$



与式 ⇔ $x^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$
これは，中心原点，半径 1 の円の内部である．

☆別解
★ 円の方程式　$\boldsymbol{|z|=r}$
与不等式 ⇔ $|z|\leqq\sqrt{2}$

(4)　$|z|^2>\mathrm{Re}\,z$



境界は含まない

与不等式 ⇔ $x^2+y^2>x$

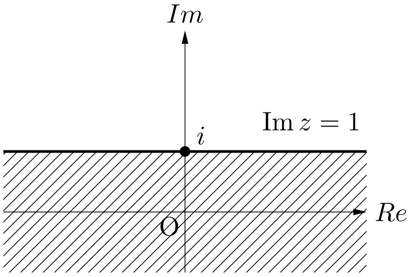
⇔ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$

これは，中心 $\frac{1}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円の外部である．

☆別解
与不等式 ⇔ $\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{1}{2}\right)>\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ⇔ $\left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け．$\overline{z}$ は z の共役複素数とし，$\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を，$\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す．例えば，$z=2+3i$ であれば，$\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である． （ S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 9 分 ）

(1) $\mathrm{Im}\,z \leqq 1$



境界を含む

★ 複素数の公式　i は虚数単位，$z=x+yi$ のとき，

① $\boldsymbol{x=\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$

② $\boldsymbol{y=\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

③ $\boldsymbol{x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}}$

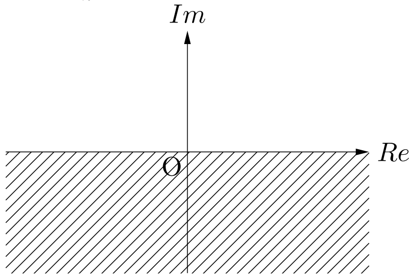
④ $\boldsymbol{\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,\overline{z}}$

⑤ $\boldsymbol{\mathrm{Im}\,z=-\mathrm{Im}\,\overline{z}}$

以上を利用して，(x,y) について考えれば，
xy 座標平面上の領域として扱うことができる．

与不等式 $\Leftrightarrow$ $y \leqq 1$

(2) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z}>0$



境界は含まない

$z \neq 0$ かつ $z=x+yi$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

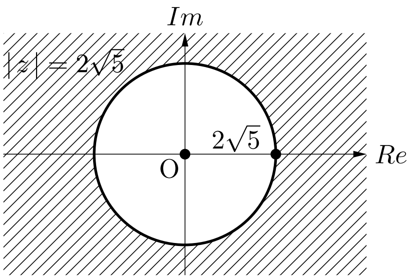
$$\therefore\quad \mathrm{Im}\,\frac{1}{z}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Im}\,\frac{x-yi}{x^2+y^2}>0$$
$$\Leftrightarrow\quad -y>0 \quad\Leftrightarrow\quad y<0$$

☆別解

$z \neq 0$ かつ $z=x+yi$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$

$$\therefore\quad \mathrm{Im}\,\frac{1}{z}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Im}\,\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}>0$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{Im}\,\overline{z}>0$$
$$\Leftrightarrow\quad -\mathrm{Im}\,z>0 \qquad \leftarrow\text{★ 公式⑤}$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{Im}\,z<0$$

(3) $|z|^2 \geqq 20$



境界を含む

与式 $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

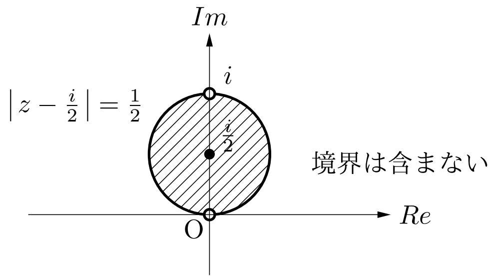
これは，中心原点，半径 $2\sqrt{5}$ の円の外部である．

☆別解

★ 円の方程式　$\boldsymbol{|z|=r}$

与式 $\Leftrightarrow$ $|z| \geqq 2\sqrt{5}$

(4) $|z|^2<\mathrm{Im}\,z$



与不等式 $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2<y$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2<\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

これは，中心 $\frac{i}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円の内部である．

☆別解

$$\text{与不等式}\quad\Leftrightarrow\quad z\overline{z}<\tfrac{z-\overline{z}}{2i}$$
$$\Leftrightarrow\quad z\overline{z}-\tfrac{1}{2i}z+\tfrac{1}{2i}\overline{z}<0$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(z+\tfrac{1}{2i}\right)\left(\overline{z}-\tfrac{1}{2i}\right)<-\tfrac{1}{4i^2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(z+\tfrac{1}{2i}\right)\left\{\overline{z}+\overline{\left(\tfrac{1}{2i}\right)}\right\}<\tfrac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(z+\tfrac{1}{2i}\right)\overline{\left(z+\tfrac{1}{2i}\right)}<\tfrac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow\quad \left|z+\tfrac{1}{2i}\right|^2<\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad \left|z-\tfrac{i}{2}\right|<\tfrac{1}{2}$$

☆注意　不等式で複素数を扱うとき，両辺を i で割ったりできないので式変形に気をつけること．