反射テスト　複素平面　図形　01

1.　次の式を満たす z が描く図形を複素平面上に描け. ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数とする.

（ S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$z+\overline{z}=1$

(2)　$\dfrac{z}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}+\dfrac{\overline{z}}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}=1$

(3)　$z\overline{z}=1$

(4)　$(z-1)(\overline{z}-1)=1$

2. 次の式を満たす z が描く図形を複素平面上に描け. ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数とする.

(S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

(1) $z-\overline{z}=2i$

(2) $\dfrac{z}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}-\dfrac{\overline{z}}{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}=2i$

(3) $z\overline{z}=2$

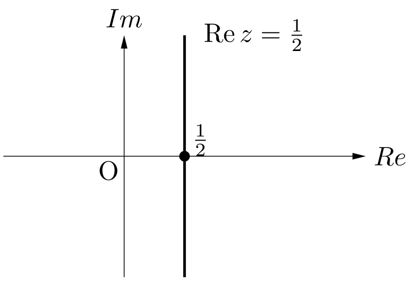
(4) $(z-i)(\overline{z}+i)=1$

反射テスト　複素平面　図形　01　解答解説

1.　次の式を満たす z が描く図形を複素平面上に描け．ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

（ S 級 1 分 50 秒，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 ）

(1)　$z+\overline{z}=1$



★ **複素数の公式**　i は虚数単位

$\boldsymbol{z=x+yi}$ のとき，$\left(\overline{z}=\overline{x+yi}=x-yi\right)$

①　$\boldsymbol{x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}}$

②　$\boldsymbol{y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

③　$\boldsymbol{x^2+y^2=z\overline{z}}$

以上を利用して，(x,y) について考えれば，

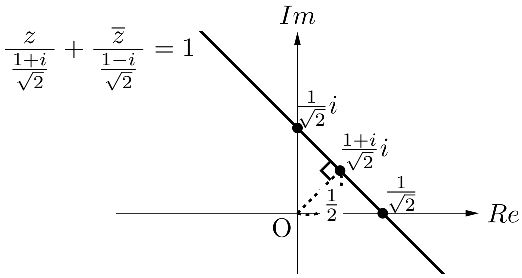
xy 座標平面上の図形として扱うことができる．

①　⇔　$z+\overline{z}=2x$ を代入して，

$2x=1$　⇔　$x=\frac{1}{2}$

これは，y 軸に平行 かつ 点 $\frac{1}{2}$ を通る **直線** である．

(2)　$\dfrac{z}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}+\dfrac{\overline{z}}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}=1$



$z=x+yi$，$\overline{z}=x-yi$ を代入して整理すると，

与式　⇔　$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=1$　⇔　$\dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\dfrac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$

☆別解

★ **原点を中心とする回転移動**

$f(z)=0$ を原点を中心にθ回転させた図形は，

$$\boldsymbol{f\left(\frac{z}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)=0}$$

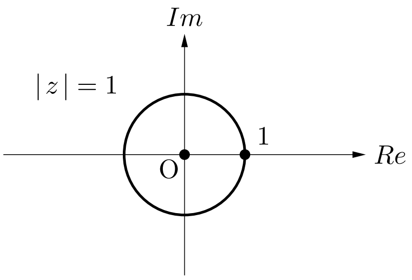
$c=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ とおくと，

与式　⇔　$\dfrac{z}{c}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{c}}=1$　⇔　$\dfrac{z}{c}+\overline{\left(\dfrac{z}{c}\right)}=1$

$c=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ であるから，

(1) の図形を $\frac{\pi}{4}$ 回転すればよい．

(3)　$z\overline{z}=1$



与式　⇔　$x^2+y^2=1^2$

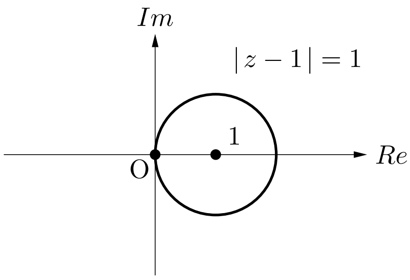
これは，中心原点，半径 1 の円である．

☆別解

★ **円の方程式**　$\boldsymbol{|\,z\,|=r}$

与式　⇔　$|\,z\,|^2=1^2$　⇔　$|\,z\,|=1$

(4)　$(z-1)\,(\overline{z}-1)=1$



与式　⇔　$z\overline{z}-z-\overline{z}=0$

⇔　$x^2+y^2-2x=0$

⇔　$(x-1)^2+y^2=1^2$

これは，中心 1，半径 1 の円である．

☆別解　★ **平行移動**

$f(z)=0$ を複素数 c の平行移動を施すと，$\boldsymbol{f(z-c)=0}$

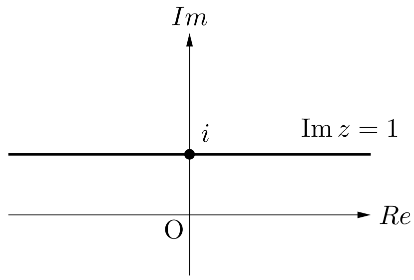
与式　⇔　$(z-1)\,\overline{(z-1)}=1^2$　⇔　$|\,z-1\,|=1$

これは，$z\overline{z}=1$ を 1 平行移動すればよい．

2. 次の式を満たす z が描く図形を複素平面上に描け．ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

（ S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 ）

(1) $z - \overline{z} = 2i$



★ 複素数の公式 i は虚数単位

$\boldsymbol{z = x + yi}$ のとき，$\left(\overline{z} = \overline{x+yi} = x - yi\right)$

① $\boldsymbol{x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}}$

② $\boldsymbol{y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}$

③ $\boldsymbol{x^2 + y^2 = z\overline{z}}$

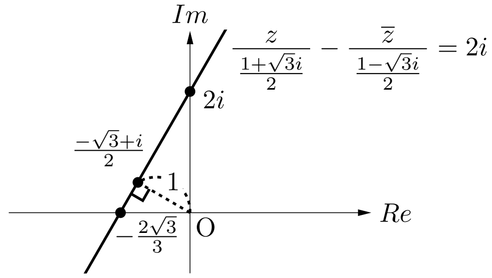
以上を利用して，(x, y) について考えれば，
xy 座標平面上の図形として扱うことができる．

① $\Leftrightarrow$ $z - \overline{z} = 2yi$ を代入して，

$2yi = 2i \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$

これは，x 軸に平行 かつ 点 i を通る **直線** である．

(2) $\dfrac{z}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} - \dfrac{\overline{z}}{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}} = 2i$



$z = x + yi$，$\overline{z} = x - yi$ を代入して整理すると，

与式 $\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3}x + y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{3}x + 2$

☆別解

★ 原点を中心とする回転移動

$f(z) = 0$ を原点を中心にθ回転させた図形は，

$$\boldsymbol{f\left(\frac{z}{\cos\theta + i\sin\theta}\right) = 0}$$

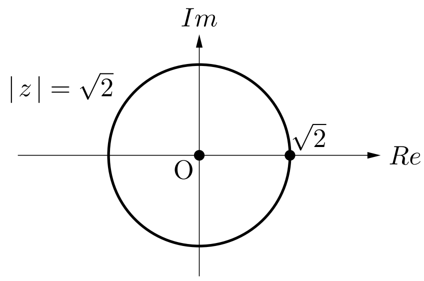
$c = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，

与式 $\Leftrightarrow \quad \dfrac{z}{c} - \dfrac{\overline{z}}{\overline{c}} = 2i \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{z}{c} - \overline{\left(\dfrac{z}{c}\right)} = 2i$

$c = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ であるから，

(1) の図形を $\frac{\pi}{3}$ 回転すればよい．

(3) $z\overline{z} = 2$



与式 $\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

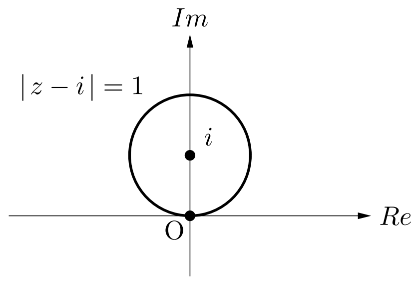
これは，中心原点，半径$\sqrt{2}$の円である．

☆別解

★ 円の方程式 $\boldsymbol{|z| = r}$

与式 $\Leftrightarrow \quad |z|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = \sqrt{2}$

(4) $(z - i)(\overline{z} + i) = 1$



与式 $\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + zi - \overline{z}i + 1 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = 1^2$

これは，中心 i，半径 1 の円である．

☆別解 **★ 平行移動**

$f(z) = 0$ を複素数 c の平行移動を施すと，$\boldsymbol{f(z - c) = 0}$

与式 $\Leftrightarrow \quad (z - i)\overline{(z - i)} = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z - i| = 1$

これは，$z\overline{z} = 1$ を i 平行移動すればよい．