反射テスト　複素平面　図形　直線　他の表現　02

1. 　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である.　　（ S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

(1)　$z=\overline{z}$

(2)　$\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{2}-\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{3}=1$

(3)　$\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}+\dfrac{\overline{z}}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}=1$

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である. （ S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

(1) $\overline{z}=-z$

(2) $\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{4}-\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{3}=-1$

(3) $\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}+\dfrac{\overline{z}}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}=1$

反射テスト　複素平面　図形　直線　他の表現　02　解答解説

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\,z = 3$ である.　（S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分）

★ 直線の変換

① xy 座標平面の直線：$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$　⇔　複素平面の直線：$\boldsymbol{(a - bi)\,z + (a + bi)\,\overline{z} + 2c = 0}$

a, b, c は実定数 (実数の定数)

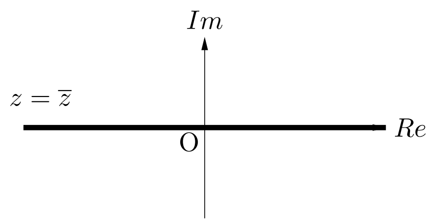
② 複素平面の直線：$\boldsymbol{\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0}$　⇔　xy 座標平面の直線：$\boldsymbol{2ax - 2by + c = 0}$

αは複素数の定数. a, b, c は実定数で, $\alpha = a + bi$.

★ 平行移動　$f(z) = 0$ を複素数 c の平行移動を施すと,　$\boldsymbol{f(z - c) = 0}$

★ 原点を中心とする回転移動　$f(z) = 0$ を原点を中心にθ回転させた図形は,　$\boldsymbol{f\left(\dfrac{z}{\cos\theta + i\sin\theta}\right) = 0}$

(1)　$z = \overline{z}$

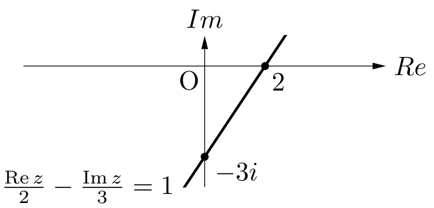


★ 複素数 z が実数　⇔　$z = \overline{z}$

$z = x + yi$ とおけば,

$z = \overline{z}$　⇔　$x + yi = x - yi$　⇔　$y = 0$

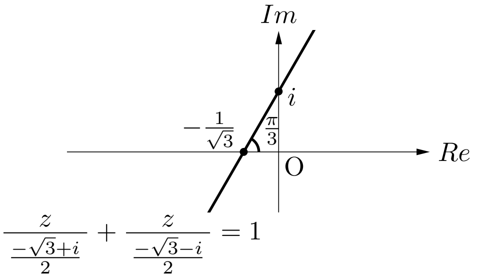
(2)　$\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{2} - \dfrac{\mathrm{Im}\,z}{3} = 1$



$z = x + yi$ とおけば, $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$ であるから,

与不等式　⇔　$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

(3)　$\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} + \dfrac{\overline{z}}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}} = 1$



与式　⇔　$\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} + \overline{\left(\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\right)} = 1$　$\cdots$①

⇔　$y = \sqrt{3}x + 1$

☆別解　$\frac{-\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi$ より,

①から, $z + \overline{z} = 1$ を $\frac{5}{6}\pi$ 回転移動したものと考える.

← **★ 原点を中心とする回転移動** を参照.

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である.　　（ S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

★ 直線の変換

① xy 座標平面の直線：$\boldsymbol{ax+by+c=0}$ ⇔ 複素平面の直線：$\boldsymbol{(a-bi)\,z+(a+bi)\,\overline{z}+2c=0}$

a, b, c は実定数 (実数の定数)

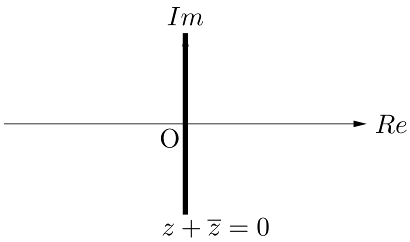
② 複素平面の直線：$\boldsymbol{\alpha z+\overline{\alpha z}+c=0}$ ⇔ xy 座標平面の直線：$\boldsymbol{2ax-2by+c=0}$

αは複素数の定数. a, b, c は実定数で, $\alpha=a+bi$.

★ 平行移動　$f(z)=0$ を複素数 c の平行移動を施すと,　$\boldsymbol{f(z-c)=0}$

★ 原点を中心とする回転移動　$f(z)=0$ を原点を中心にθ回転させた図形は,　$\boldsymbol{f\left(\dfrac{z}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)=0}$

(1)　$\overline{z}=-z$

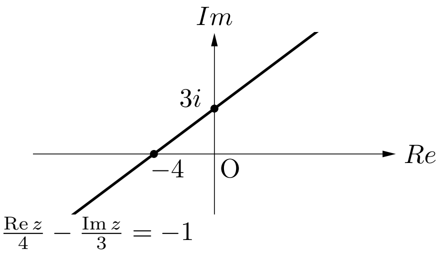


★ 複素数 z が純虚数　⇔　$\boldsymbol{z+\overline{z}=0}$

$z=x+yi$ とおけば,

$\overline{z}=-z$ ⇔ $x-yi=-(x+yi)$ ⇔ $x=0$

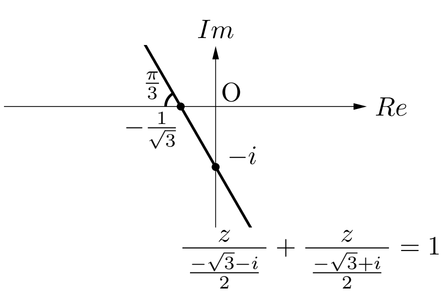
(2)　$\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{4}-\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{3}=-1$



$z=x+yi$ とおけば, $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$ であるから,

与不等式 ⇔ $-\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

(3)　$\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}+\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}=1$



与式 ⇔ $\dfrac{z}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}+\overline{\left(\dfrac{\overline{z}}{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}\right)}=1$　$\cdots$①

⇔ $y=-\sqrt{3}x-1$

☆別解　$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi$ より,

①から, $z+\overline{z}=1$ を $\frac{7}{6}\pi$ 回転移動したものと考える.

← **★ 原点を中心とする回転移動** を参照.