反射テスト　複素平面　図形　直線　他の表現　01

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\,z = 3$ である.（ S 級 2 分 30 秒、A 級 4 分 30 秒、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

(1)　$2\,\mathrm{Re}\,z + 3\,\mathrm{Im}\,z = 6$

(2)　$\arg\,(z-1) = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $z \neq 1$

(3)　$(2+i)\,z + (2-i)\,\overline{z} + 6 = 0$

2. 次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z = 2 + 3i$ であれば, $\mathrm{Re}\, z = 2$ かつ $\mathrm{Im}\, z = 3$ である. （ S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

(1) $\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{2} - \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{3} = \dfrac{1}{6}$

(2) $\arg(z - i) = -\dfrac{\pi}{4}$ かつ $z \neq i$

(3) $(1 + 3i)\, z + (1 - 3i)\, \overline{z} + 6 = 0$

反射テスト　複素平面　図形　直線　他の表現　01　解答解説

1.　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である.（S 級 2 分 30 秒、A 級 4 分 30 秒、B 級 7 分、C 級 9 分）

★ 直線の方程式　反射テスト 2 点を通る直線 01 を参照.

点 Z が直線 AB 上にある　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{z-a}{b-a}=\dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$

★ 法線の方程式　反射テスト 法線 01 を参照.

直線 AB と垂直で, 点 C を通る直線上に点 Z がある　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{z-c}{b-a}+\dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}=0$

ここでは他の表現法について考える.

★ 複素平面上の直線①

xy 座標平面上の直線は x, y の 1 次方程式で表せる.

$\Rightarrow$　$x=\mathrm{Re}\,z$ と $y=\mathrm{Im}\,z$ とおけば, 直線の方程式は, **$\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z$ の 1 次方程式** で表せる.

★ 複素平面上の直線②

実軸に対しての角度 (ラジアン) を傾きと考えれば, 原点を起点とする **半直線**(原点をのぞく) は, $\boldsymbol{\arg z=\theta}$ と表せる.

$\arg 0$ は一意に定まらないので, ここでは不定形と考えよう. よって, 上の方程式は原点を除いた半直線となる.

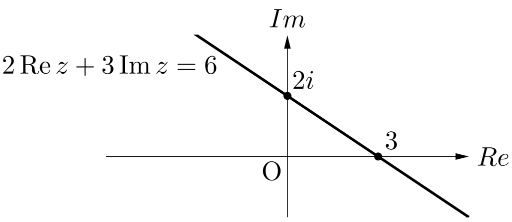
これに下にある平行移動を施す. 起点 C を複素数 c を用いて表すと,

傾き θ , 起点 $\mathrm{C}(c)$ の半直線の方程式　$\boldsymbol{\arg(z-c)=\theta}$

★ 平行移動　$f(z)=0$ を複素数 c の平行移動を施すと,　$\boldsymbol{f(z-c)=0}$

★ 原点を中心とする回転移動　$f(z)=0$ を原点を中心にθ回転させた図形は,　$\boldsymbol{f\left(\dfrac{z}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)=0}$

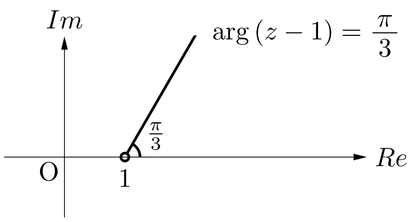
(1)　$2\,\mathrm{Re}\,z+3\,\mathrm{Im}\,z=6$



$z=x+yi$ とおけば, $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$ であるから,

与不等式　$\Leftrightarrow$　$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

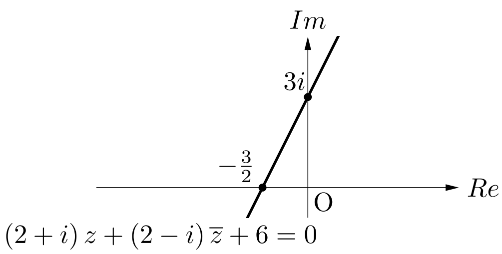
(2)　$\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $z\neq 1$



$\arg z=\dfrac{\pi}{3}$ を 複素数 1 の方向に平行移動したもの.

$\arg z=\dfrac{\pi}{3}$ は原点を起点とし, 傾き $\frac{\pi}{3}$ の半直線

(3)　$(2+i)\,z+(2-i)\,\overline{z}+6=0$



★ 直線の変換

①　$\boldsymbol{ax+by+c=0}$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{(a-bi)\,z+(a+bi)\,\overline{z}+2c=0}$

a, b, c は実定数 (実数の定数)

②　$\boldsymbol{\alpha z+\overline{\alpha z}+c=0}$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{2ax-2by+c=0}$

αは複素数の定数. a, b, c は実定数で, $\alpha=a+bi$.

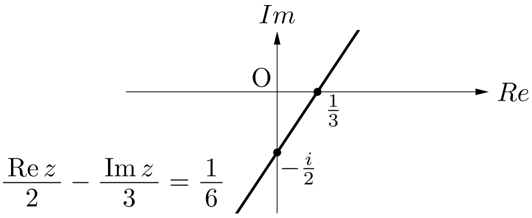
$(2+i)\,z+(2-i)\,\overline{z}+6=0$

$\Leftrightarrow$　$(2+i)\,z+\overline{(2+i)z}+6=0$

$\Leftrightarrow$　$4x-2y+6=0$　$\Leftrightarrow$　$y=2x+3$

2. 　次の式を満たす z の範囲を複素平面上に描け. i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数とし, $\mathrm{Re}\,z$ は z の実部を, $\mathrm{Im}\,z$ は z の虚部を表す. 例えば, $z=2+3i$ であれば, $\mathrm{Re}\,z=2$ かつ $\mathrm{Im}\,z=3$ である.　　（ S 級 3 分、A 級 5 分、B 級 7 分、C 級 9 分 ）

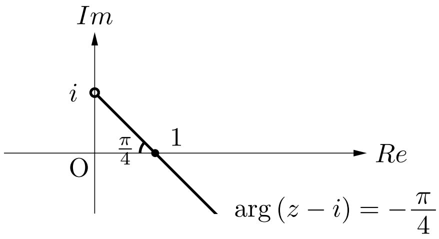
(1)　$\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{2}-\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{3}=\dfrac{1}{6}$



$z=x+yi$ とおけば, $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$ であるから,

$$\text{与不等式} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y=1$$

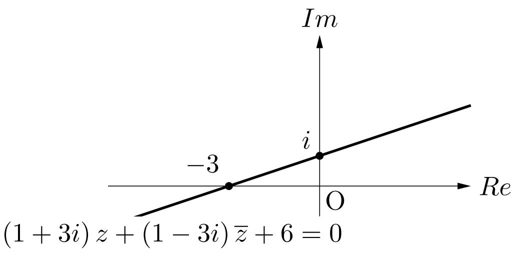
(2)　$\arg(z-i)=-\dfrac{\pi}{4}$ かつ $z\neq i$



$\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$ を 複素数 i の方向に平行移動したもの.

$\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$ は原点を起点とし, 傾き $-\frac{\pi}{4}$ の半直線

(3)　$(1+3i)\,z+(1-3i)\,\overline{z}+6=0$



★ 直線の変換

① 　$\boldsymbol{ax+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-bi)\,z+(a+bi)\,\overline{z}+2c=0}$

　a,b,c は実定数 (実数の定数)

② 　$\boldsymbol{\alpha z+\overline{\alpha z}+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax-2by+c=0}$

　αは複素数の定数. a,b,c は実定数で, $\alpha=a+bi$.

$$(1+3i)\,z+(1-3i)\,\overline{z}+6=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (1+3i)\,z+\overline{(1+3i)z}+6=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-6y+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+1$$