反射テスト　複素平面　２点を通る直線　01

1.　複素平面上の 2 点 A, B を通る直線の方程式を作れ. 直線上の点を Z とし, Z を表す複素数を z とする.

（ S 級 1 分 20 秒、A 級 2 分、B 級 3 分 20 秒、C 級 5 分 ）

(1)　A (0) , B $(4+2i)$

(2)　A (1) , B (i)

(3)　A $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$, B (-1)

2. 複素平面上の 2 点 A, B を通る直線の方程式を作れ. 直線上の点を Z とし, Z を表す複素数を z とする.

（ S 級 2 分、A 級 3 分 10 秒、B 級 5 分、C 級 7 分 ）

(1) $\mathrm{A}\,(-3+5i)$, $\mathrm{B}\,(-3+2i)$

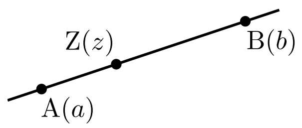
(2) $\mathrm{A}\,(-2i)$, $\mathrm{B}\,(-4)$

(3) $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$, $\mathrm{B}\,(2i)$

反射テスト　複素平面　２点を通る直線　01　解答解説

1.　複素平面上の２点 A, B を通る直線の方程式を作れ．直線上の点を Z とし，Z を表す複素数を z とする．

（ S 級１分 20 秒、A 級２分、B 級３分 20 秒、C 級５分 ）



★ 直線の方程式

点 Z が直線 AB 上にある　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{z-a}{b-a}=\dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$

☆証明は次を参照. 反射テスト 複素平面 平行・垂直・直線 01

(1)　A (0)，B $(4+2i)$

$$\frac{z-0}{(4+2i)-0}=\frac{\overline{z}-\overline{0}}{\overline{(4+2i)}-\overline{0}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z}{4+2i}=\frac{\overline{z}}{4-2i}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z}{2+i}=\frac{\overline{z}}{2-i}}$$

(2)　A (1)，B (i)

$$\frac{z-1}{i-1}=\frac{\overline{z}-\overline{1}}{\overline{i}-\overline{1}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z-1}{i-1}=-\frac{\overline{z}-1}{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z-1}{1-i}=\frac{\overline{z}-1}{1+i}}$$

(3)　A $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$，B (-1)

公式で a, b を逆にした方が簡単.

$$\frac{z-(-1)}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}-(-1)}=\frac{\overline{z}-\overline{(-1)}}{\overline{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}-\overline{(-1)}} \Leftrightarrow \frac{z+1}{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}}=\frac{\overline{z}+1}{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z+1}{3+\sqrt{3}i}=\frac{\overline{z}+1}{3-\sqrt{3}i}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z+1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\overline{z}+1}{\sqrt{3}-i}} \quad \cdots①$$

☆別解　そのまま公式に代入すると,

$$\frac{z-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}{(-1)-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=\frac{\overline{z}-\overline{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}}{\overline{(-1)}-\overline{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}} \Leftrightarrow \frac{z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}}=\frac{\overline{z}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}{\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{2z-1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{2\overline{z}-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}} \quad \cdots②$$

分母をはらって整理すれば，①と②の同値が確かめられる．

2. 複素平面上の 2 点 A, B を通る直線の方程式を作れ. 直線上の点を Z とし, Z を表す複素数を z とする.

（ S 級 2 分、A 級 3 分 10 秒、B 級 5 分、C 級 7 分 ）

(1) A $(-3+5i)$, B $(-3+2i)$

$$\frac{z-(-3+5i)}{(-3+5i)-(-3+2i)}=\frac{\overline{z}-\overline{(-3+5i)}}{\overline{(-3+5i)}-\overline{(-3+2i)}} \iff \boldsymbol{\frac{z+3-5i}{3i}=\frac{\overline{z}+3+5i}{-3i}}$$

$$\iff \boldsymbol{z+3-5i=-\overline{z}-3-5i}$$

$$\iff \boldsymbol{z+\overline{z}=-6}$$

$$\iff \boldsymbol{Re\,z=-3}$$

☆答えは右側にあるものであれば, どれでもいい.

(2) A $(-2i)$, B (-4)

公式で a, b を逆にした方が簡単.

$$\frac{z-(-4)}{-2i-(-4)}=\frac{\overline{z}-\overline{(-4)}}{\overline{(-2i)}-\overline{(-4)}} \iff \boldsymbol{\frac{z+4}{-2i+4}=\frac{\overline{z}+4}{2i+4}}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{z+4}{2-i}=\frac{\overline{z}+4}{2+i}}$$

(3) A $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$, B $(2i)$

公式で a, b を逆にした方が簡単.

$$\frac{z-2i}{\frac{\sqrt{3}+i}{2}-(2i)}=\frac{\overline{z}-\overline{(2i)}}{\overline{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}-\overline{(2i)}} \iff \frac{z-2i}{\frac{\sqrt{3}-3i}{2}}=\frac{\overline{z}+2i}{\frac{\sqrt{3}+3i}{2}}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{z-2i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{\overline{z}+2i}{\sqrt{3}+3i}}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{z-2i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\overline{z}+2i}{1+\sqrt{3}i}} \quad \cdots①$$

☆別解 そのまま公式に代入すると,

$$\frac{z-\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}{2i-\frac{\sqrt{3}+i}{2}}=\frac{\overline{z}-\overline{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}}{\overline{(2i)}-\overline{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}} \iff \frac{z-\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{-\sqrt{3}+3i}{2}}=\frac{\overline{z}-\frac{\sqrt{3}-i}{2}}{\frac{-\sqrt{3}-3i}{2}}$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{2z-\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{2\overline{z}-\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i}} \quad \cdots②$$

分母をはらって整理すれば, ①と②の同値が確かめられる.