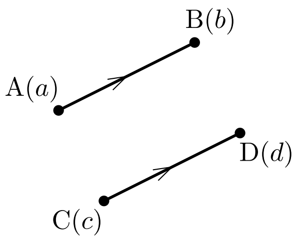
# 反射テスト　複素平面　平行・垂直・直線　01

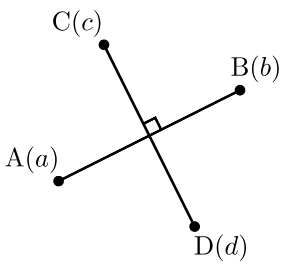
**1.**　複素平面上に点 A, B, C, D がある．点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $a, b, c, d$ とし，その共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ とする．以下の幾何学的表現について，複素数と共役複素数のみを用いて方程式を作れ．

（ $S$ 級 40 秒、$A$ 級 1 分 10 秒、$B$ 級 2 分、$C$ 級 3 分 ）

(1)　AB // CD




(2)　AB ⊥ CD



**2.** 　複素平面上に点 A, B, C がある．点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ $a, b, c$ とし，その共役複素数をそれぞれ$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$とする．以下の幾何学的表現について，複素数と共役複素数のみを用いて方程式を作れ．

（ $S$ 級 30 秒、$A$ 級 50 秒、$B$ 級 1 分 20 秒、$C$ 級 2 分 ）

(1)　点 A が直線 BC 上

(2)　$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$

# 反射テスト　複素平面　平行・垂直・直線　01　解答解説

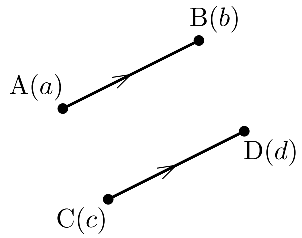
**1.**　複素平面上に点 A, B, C, D がある．点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $a, b, c, d$ とし，その共役複素数をそれぞれ$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ とする．以下の幾何学的表現について，複素数と共役複素数のみを用いて方程式を作れ．

（ $S$ 級 40 秒、$A$ 級 1 分 10 秒、$B$ 級 2 分、$C$ 級 3 分 ）

以下，便宜的にベクトル表現を使う．

X$(x)$，Y$(y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{XY}} = y - x$ とする．

(1)　AB // CD




題意から，$c, d$ 一致しないので，$c - d \neq 0$

**★ 平行**　AB // CD　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{b-a}{d-c} = \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}}$

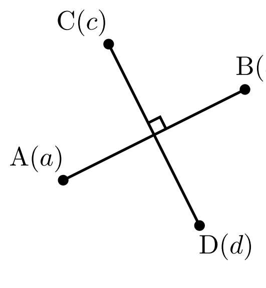
AB // CD　$\Leftrightarrow$　$(b-a) \mathbin{/\!/} (d-c)$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{b-a}{d-c}$ が実数 (商が $0°, 180°$ の回転移動を表す)

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{b-a}{d-c} = \overline{\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right)}$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{b-a}{d-c} = \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}}$

(2)　AB ⊥ CD




題意から，$c, d$ は一致しないので，$c - d \neq 0$

**★ 垂直**　AB ⊥ CD　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{b-a}{d-c} + \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}} = 0}$

AB ⊥ CD　$\Leftrightarrow$　$(b-a) \perp (d-c)$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{b-a}{d-c}$ が純虚数 (商が $90°, 270°$ の回転移動を表す)

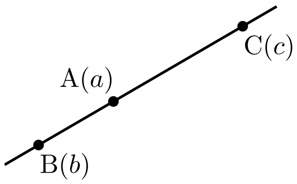
$\Leftrightarrow$　$\dfrac{b-a}{d-c} + \overline{\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{b-a}{d-c} + \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}} = 0}$

**2.**　複素平面上に点 A, B, C がある．点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ $a, b, c$ とし，その共役複素数をそれぞれ $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ とする．以下の幾何学的表現について，複素数と共役複素数のみを用いて方程式を作れ．

（ $S$ 級 30 秒、$A$ 級 50 秒、$B$ 級 1 分 20 秒、$C$ 級 2 分 ）

(1)　点 A が直線 BC 上



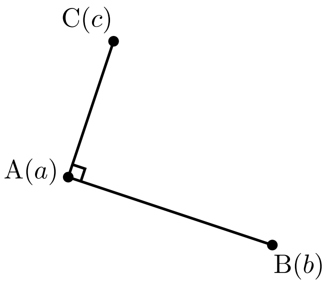

題意から，$b, c$ は一致しないので，$c-b \neq 0$

**★ 平行**　AB // BC　⇔　$\boldsymbol{\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}}}$

よって，次の公式を導くことが可能になる．

**★ 直線の方程式**　点 Z が直線 AB 上にある　⇔　$\dfrac{z-a}{b-a} = \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$

(2)　$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$




題意から，$a, b, c$ はどれも一致しないので，$(c-a)(b-a) \neq 0$

**★ 垂直**　AB ⊥ AC　⇔　$\boldsymbol{\dfrac{c-a}{b-a} + \dfrac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = 0}$

☆補足　もし左図のように A, B, C が配置されているならば，

$\arg \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\pi}{2}$　⇔　$\dfrac{c-a}{|c-a|} \dfrac{|b-a|}{b-a} = i$

とした方がいいときもある．問題文により適当な等式を作ること．

上の解答の形は $90^\circ, 270^\circ$ の両方を含んでいることに留意．

よって，次の公式を導くことが可能になる．

**★ 法線の方程式**　直線 AB と垂直で，点 C を通る直線上に点 Z がある　⇔　$\dfrac{z-c}{b-a} + \dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}} = 0$

補足　**★ 平行四辺形 ABCD**

定義「二組の対辺が平行」から「$a-b = d-c$」を導こう．

二組の対辺が平行だから，$\dfrac{d-c}{a-b}, \dfrac{a-d}{b-c}$ は正の実数．それぞれ $p, q$ とする．

$\dfrac{d-c}{a-b} = p$　かつ　$\dfrac{a-d}{b-c} = q$

$d$ を消去して，$(p-1)a + (q-p)b + (1-q)c = 0$

これが任意の $a, b, c$ に対して成り立つから，$p-1 = q-p = 1-q = 0$　⇔　$p = q = 1$

$\therefore$　$\dfrac{d-c}{a-b} = 1$　⇔　$a-b = d-c$