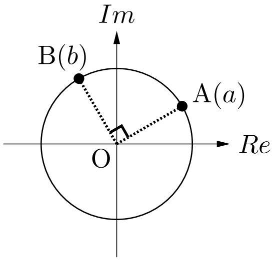
反射テスト　複素平面　角度の表現　01

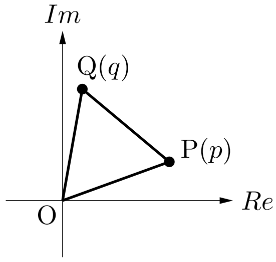
1.　複素平面上の点を表す複素数を考える. ( ) 内はその点を表す複素数とする. 虚数単位は i, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

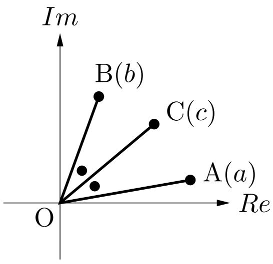
(1)　b を a で表せ.



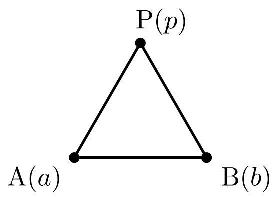
(2)　△OPQ が正三角形であるとき, q を p で表せ.



(3)　下図のように点 C は∠AOB の二等分線上にある.
a, b, c を用いて, arg を使わない等式を作れ.



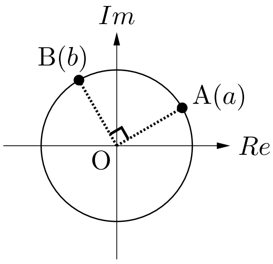
(4)　△PAB は正三角形.
このとき p を a, b, ωで最も簡潔に表せ.



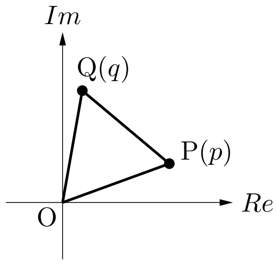
2. 複素平面上の点を表す複素数を考える. ( ) 内はその点を表す複素数とする. 虚数単位は i , $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

(S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)

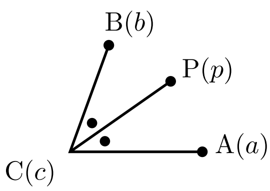
(1) a を b で表せ.



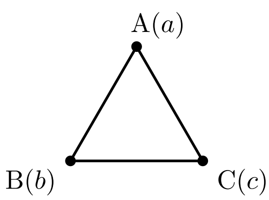
(2) △OPQ が正三角形であるとき, p を q で表せ.



(3) 下図のように点 P は∠ACB の二等分線上にある.
a, b, c, p を用いて, arg を使わない等式を作れ.



(4) △ABC は正三角形.
このとき b を a, c, ωで最も簡潔に表せ.



反射テスト　複素平面　角度の表現　01　解答解説

1.　複素平面上の点を表す複素数を考える. ( ) 内はその点を表す複素数とする. 虚数単位は i, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

★ **回転移動**　P(p) を原点を中心に $+\theta$ の回転移動を施すと,　$p\times\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)}$

特に
$$\begin{cases} +90^\circ \text{の回転移動は} & \times \boldsymbol{i} & \\ +60^\circ \text{の回転移動は} & \times \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}} & \cdots \ (\boldsymbol{-\omega^2}) \ \text{倍} \\ +120^\circ \text{の回転移動は} & \times \boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}} & \cdots \ \boldsymbol{\omega} \ \text{倍} \end{cases}$$

★ **角度が等しい** ことは **偏角** を用いる. 上の逆算のイメージになる.

$\theta=\angle\mathrm{POQ}$ と考えると　$q=p\,(\cos\theta+i\sin\theta)$　$\Leftrightarrow$　$\theta=\arg\dfrac{q}{p}$

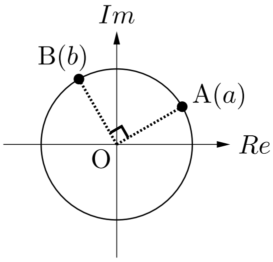
つまり　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DEF}$　$\Leftrightarrow$　$\left|\arg\dfrac{a-b}{c-b}\right|=\left|\arg\dfrac{d-e}{f-e}\right|$

点が図示されていれば, 向きに注意して $\arg\dfrac{a-b}{c-b}=\arg\dfrac{d-e}{f-e}$ とできる.

さらに　$\dfrac{a-b}{|a-b|}\cdot\dfrac{|c-b|}{c-b}=\dfrac{d-e}{|d-e|}\cdot\dfrac{|f-e|}{f-e}$　とすれば複素数の方程式を考えることができる.

☆複素平面は回転・角度の表記に適している. 使いこなせれば図形や解析問題で武器になる.
☆いくつか別解もあげているが, 他の形もあるだろう. ただし, どれもすぐにピンとくるようにすること.

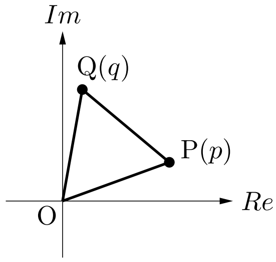
(1)　b を a で表せ.



$+90^\circ$ の回転移動は　$\times\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{b=ai}$

(2)　△OPQ が正三角形であるとき, q を p で表せ.

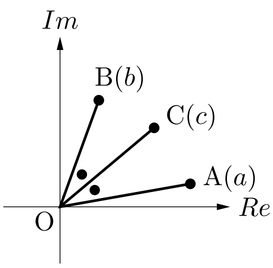


$+60^\circ$ の回転移動は　$\times\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}\right)$

$$\boldsymbol{q=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}p}$$

☆別解　$\boldsymbol{q=-\omega^2 p}$　…詳細は次ページ

(3)　下図のように点 C は∠AOB の二等分線上にある.
a, b, c を用いて, arg を使わない等式を作れ.



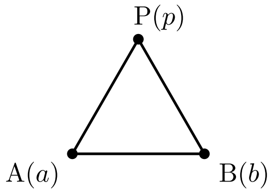
$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{COB}$　$\Leftrightarrow$　$\arg\frac{c}{a}=\arg\frac{b}{c}$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{c}{|c|}\cdot\dfrac{|a|}{a}=\dfrac{b}{|b|}\cdot\dfrac{|c|}{c}$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{c^2}{|c|^2}=\dfrac{a}{|a|}\cdot\dfrac{b}{|b|}}$

☆別解　$\arg\frac{c}{a}-\arg\frac{b}{c}=0$

$\Leftrightarrow$ $\arg\frac{c^2}{ab}=0\Rightarrow\boldsymbol{\frac{c^2}{ab}=\frac{\overline{c}^2}{\overline{a}\overline{b}}}$　(一応正解.詳細は 2(3) で)

(4)　△PAB は正三角形.
このとき p を a, b, ωで最も簡潔に表せ.



$+60^\circ$ の回転移動は　$\times\left(\boldsymbol{-\omega^2}\right)$　…詳細は次ページ

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\left(-\omega^2\right)=-\omega^2(b-a)$

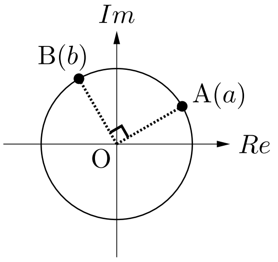
$p=a+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a-\omega^2(b-a)=(1+\omega^2)a-\omega^2 b$

$=\boldsymbol{-\omega a-\omega^2 b}$　$\left(\because\ \omega^2+\omega+1=0\right)$

2. 　複素平面上の点を表す複素数を考える. ( ) 内はその点を表す複素数とする. 虚数単位は i , $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 ）

(1) 　a を b で表せ.

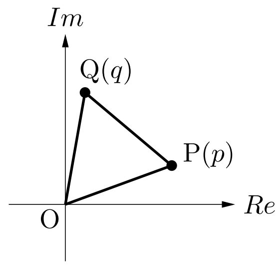


-90° の回転移動は　$\boldsymbol{\times(-i)}$

$$\boldsymbol{a = -bi}$$

☆ $\div(i)$ と考えて, $\dfrac{1}{i} = -i$, 倍.

(2) 　△OPQ が正三角形であるとき, p を q で表せ.

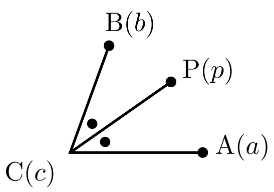


-60° の回転移動は　$\boldsymbol{\times\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$

$$\boldsymbol{p = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}q}$$

☆別解　$\boldsymbol{p = -\omega q}$　…詳細はこのページの下部.

(3) 　下図のように点 P は∠ACB の二等分線上にある.
a, b, c, p を用いて, arg を使わない等式を作れ.



$\angle\mathrm{ACP} = \angle\mathrm{PCB} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\dfrac{p-c}{a-c} = \arg\dfrac{b-c}{p-c}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{b-c}{|b-c|}\cdot\dfrac{|p-c|}{p-c} = \dfrac{p-c}{|p-c|}\cdot\dfrac{|a-c|}{a-c}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\dfrac{(p-c)^2}{|p-c|^2} = \dfrac{a-c}{|a-c|}\cdot\dfrac{b-c}{|b-c|}}$

☆別解　$\arg\frac{p-c}{a-c} - \arg\frac{b-c}{p-c} = 0$

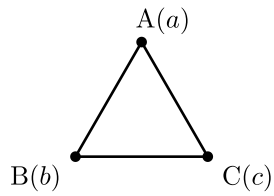
$\Leftrightarrow \quad \arg\frac{(p-c)^2}{(a-c)(b-c)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{(p-c)^2}{(a-c)(b-c)} = \frac{(\overline{p}-\overline{c})^2}{(\overline{a}-\overline{c})(\overline{b}-\overline{c})}}$

☆前者は半直線上にあり, 後者は直線上にある条件になる.

$\frac{z^2}{|z|^2} = \frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{\overline{z}} = \frac{x}{|x|}\cdot\frac{y}{|y|}$

$\Rightarrow \quad \frac{z^2}{\overline{z}^2} = \frac{x^2y^2}{|x|^2|y|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{\overline{z}^2} = \frac{xy}{\overline{xy}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{xy} = \frac{\overline{z}^2}{\overline{xy}}$

(4) 　△ABC は正三角形.
このとき b を a, c, ω で最も簡潔に表せ.



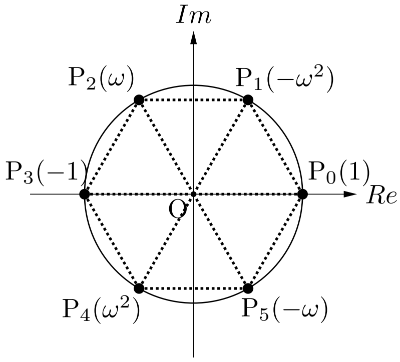
$+60^\circ$ の回転移動は　$\times\left(\boldsymbol{-\omega^2}\right)$　…詳細は下

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \left(-\omega^2\right) = -\omega^2(a-c)$

$b = c + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = c - \omega^2(a-c) = -\omega^2 a + (1+\omega^2)c$

$= \boldsymbol{-\omega^2 a - \omega c}$

★ 正六角形と ω



$\omega = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

つまり ω 倍は $+120^\circ$ の回転移動. 　$\Rightarrow$　ω^2 倍は $+240^\circ$ の回転移動.
すると原点に関して対称な移動は $\times(-1)$ だから, 左図のようになり,

★ $+60^\circ$ の回転移動 は　$\times\left(\boldsymbol{-\omega^2}\right)$

★ -60° の回転移動 は　$\times\left(\boldsymbol{-\omega}\right)$

また, 　$x^6 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm1$, $\pm\omega$, $\pm\omega^2$　であることもわかる.

☆ $\omega^3 = 1$ や $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を使うと計算しやすくなることが多いため,
図形を複素平面で考える場合, なるべく ω で考えるといいだろう.