反射テスト　複素平面　同値表現　02

1.　複素平面上の原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ．ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする．また虚数単位は i とする．

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1)　点 B は線分 OA を 2 : 1 に内分する点

(2)　$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AC}$

(3)　点 B は中心 A で半径 3 の円周上にある

(4)　3 点 A, B, C は一直線上にある

(5)　△ OAB は正三角形

(6)　C は線分 AB の垂直二等分線上にある

2. 複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ. ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする. また虚数単位は i とする.

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1) 点 C は線分 AB を 2 : 3 に外分する点

(2) AB : OC = 2 : 3

(3) 点 C は中心 B で半径 4 の円周上にある

(4) 3 点 O, A, B は一直線上にある

(5) △ OAB は∠ O を直角とする直角二等辺三角形

(6) C は∠ AOB の二等分線上にある

反射テスト　複素平面　同値表現　02　解答解説

1.　複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ．ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする．また虚数単位は i とする．

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

☆いくつか別解もあげているが，他の形もあるだろう．ただし，どれもすぐにピンとくるようにすること．

(1)　点 B は線分 OA を 2 : 1 に内分する点

$$\beta = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot \alpha}{2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta = \frac{2}{3}\alpha}$$

★ 内分点公式

線分 AB を $s : t$ に内分する点は

$$\frac{t\alpha + s\beta}{s+t}$$

(2)　AB = 2AC

$$\boldsymbol{|\beta - \alpha| = 2|\gamma - \alpha|}$$

(3)　点 B は中心 A で半径 3 の円周上にある

$$\boldsymbol{|\beta - \alpha| = 3}$$

☆別解　$\boldsymbol{(\beta - \alpha)\left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) = 3^2}$

(4)　3 点 A, B, C は一直線上にある

$$\boldsymbol{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = c} \quad (\ c \text{ は } 0, 1 \text{ 以外の実数}\ )$$

☆別解 1　$\boldsymbol{\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 0, \pi}$

☆別解 2　$\boldsymbol{\gamma = c\alpha + (1 - c)\beta}$　（ c は 0, 1 以外の実数 ）

☆最初の解と別解 1 は角度から考えたもの．
別解 2 は内分点公式による．

(5)　△ OAB は正三角形

$$\boldsymbol{|\alpha| = |\beta| = |\beta - \alpha|}$$

☆別解

$$\boldsymbol{\arg \frac{\beta - \alpha}{0 - \alpha} = \arg \frac{0 - \beta}{\alpha - \beta} = \arg \frac{\alpha - 0}{\beta - 0}}$$

☆最初の解は三辺が等しいことから，
別解は角度から作ったもの．

(6)　C は線分 AB の垂直二等分線上にある

$\Leftrightarrow$　CA = CB

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{|\alpha - \gamma| = |\beta - \gamma|}$

★ 垂直二等分線の定義

線分の端点から等距離にある点の集合．

2. 複素平面上の原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ. ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 $\mathrm{A, B, C}$ の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする. また虚数単位は i とする.

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

☆いくつか別解もあげているが，他の形もあるだろう. ただし，どれもすぐにピンとくるようにすること.

(1) 点 C は線分 AB を 2 : 3 に外分する点

$$\gamma = \frac{-3\cdot\alpha + 2\cdot\beta}{2-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma = 3\alpha - 2\beta}$$

★ 外分点公式

線分 AB を $s:t$ に外分する点は

$$\frac{-t\alpha + s\beta}{s-t}$$

(2) AB : OC = 2 : 3

$$\boldsymbol{3|\beta - \alpha| = 2|\gamma|}$$

(3) 点 C は中心 B で半径 4 の円周上にある

$$\boldsymbol{|\gamma - \beta| = 4}$$

☆別解 $\quad \boldsymbol{(\gamma - \beta)\left(\overline{\gamma} - \overline{\beta}\right) = 4^2}$

(4) 3 点 O, A, B は一直線上にある

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = c} \quad \textbf{(} \boldsymbol{c} \textbf{ は } \boldsymbol{0, 1} \textbf{ 以外の実数)}$$

☆別解 1 $\quad \boldsymbol{\arg\frac{\alpha}{\beta} = 0, \pi}$

☆別解 2 $\quad \boldsymbol{\alpha = c\beta}$ **(** $\boldsymbol{c}$ **は** $\boldsymbol{0, 1}$ **以外の実数)**

☆最初の解と別解 1 は角度から考えたもの.

(5) △ OAB は∠ O を直角とする直角二等辺三角形

$$\boldsymbol{\beta = \pm\alpha i}$$

☆別解 1 $\quad \boldsymbol{\alpha = \pm\beta i}$

☆別解 2 $\quad \boldsymbol{|\alpha| = |\beta|}$ **かつ** $\boldsymbol{\arg\frac{\beta}{\alpha} = \pm\frac{\pi}{2}}$

☆最初の解と別解 1 は $\times i$ が 90° の回転移動であることを用いた.

別解 2 は幾何的要素をそのまま書き換えただけだが，

整理すると最初の解がでてくる.

(6) C は∠ AOB の二等分線上にある

$$\boldsymbol{\arg\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}\arg\frac{\beta}{\alpha}}$$

☆別解 $\quad \boldsymbol{\arg\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}\arg\frac{\alpha}{\beta}}$

☆他の表現が難しい. 下の定義も直線との距離を定式化する必要がある.

★ 角の二等分線の定義

2 つの線分から等距離にある点の集合.