反射テスト　複素平面　同値表現　01

1.　複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ. ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする. また虚数単位は i とする.

（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　点 A は実軸上にある

(2)　点 B は正の虚軸上にある

(3)　$\mathrm{AB} = 5$

(4)　$\mathrm{CA} < \mathrm{OB}$

(5)　$\angle$ BAC が直角

(6)　$\angle$ AOB が鋭角

2. 　複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ．ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする．また虚数単位は i とする．

（ S 級 1 分 45 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1)　点 C は虚軸上にある

(2)　点 A は負の実軸上にある

(3)　$\mathrm{BC} \geqq 1$

(4)　$\mathrm{OA} = \mathrm{BC}$

(5)　$\angle$ AOB が 60°

(6)　$\angle$ ACB が鋭角

反射テスト　複素平面　同値表現　01　解答解説

1.　複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ．ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする．また虚数単位は i とする．

（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

☆いくつか別解もあげているが，他の形もあるだろう．ただし，どれもすぐにピンとくるようにすること．

(1)　点 A は実軸上にある

$$\boldsymbol{\alpha = \overline{\alpha}}$$

☆別解　$\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

☆別解　$\boldsymbol{\alpha = c}$　（ $\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{0}$ 以外の実数 ）

(2)　点 B は正の虚軸上にある

$$\boldsymbol{\frac{\beta+\overline{\beta}}{2} = 0 \text{ かつ } \frac{\beta-\overline{\beta}}{2i} > 0}$$

☆別解　$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0}$

☆別解　$\boldsymbol{\beta = c\,i}$　（ $\boldsymbol{c > 0}$ ）

(3)　AB $= 5$

$$\boldsymbol{|\beta - \alpha| = 5}$$

☆別解　$\boldsymbol{|\alpha - \beta| = 5}$

☆別解　$\boldsymbol{(\beta - \alpha)\left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) = 5^2}$

(4)　CA $<$ OB

$$\boldsymbol{|\alpha - \gamma| < |\beta|}$$

☆別解　$\boldsymbol{|\gamma - \alpha| < |\beta|}$

☆別解　$\boldsymbol{(\alpha - \gamma)\,(\overline{\alpha} - \overline{\gamma}) < \beta\overline{\beta}}$

(5)　∠ BAC が直角

$$\mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \pm\frac{\pi}{2}}$$

☆別解　$\mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \pm\frac{\pi}{2}}$

☆別解　$\mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} = \pm\frac{\pi}{2}}$

☆別解　$\mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \pm\frac{\pi}{2}}$

☆別解　$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = 0}$

☆別解　$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 0}$

☆別解　$\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = c\,i}$　（ $\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{0}$ 以外の実数 ）

☆つまり，$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ が純虚数ということ．
複素数のかけ算が回転移動を表すので，
割り算でどれくらい回転したかがわかる．

(6)　∠ AOB が鋭角

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} <} \mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\pi}{2}}$$

☆別解　$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} <} \mathbf{arg}\,\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\pi}{2}}$

☆別解　$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\frac{\beta}{\alpha} > 0}$

☆別解　$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} > 0}$

★ Re, Im で表す価値
Re, Im で表す価値は，$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\overline{z}}{2}$，$\mathrm{Im}\,z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ を用いて複素数と共役複素数で表せることにある．
以下は複素数の計算をすれば解けるだろう．
また，Re, Im は実数なので，安心して不等式を作ることができるというメリットもある．

2. 複素平面上の原点 O と 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次の表現と同値な方程式・不等式を作れ．ただし α, β, γ は，それぞれ複素平面上の点 A, B, C の位置を表す複素数とし，互いに異なり，原点とも異なるものとする．また虚数単位は i とする．

（ S 級 1 分 45 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

☆いくつか別解もあげているが，他の形もあるだろう．ただし，どれもすぐにピンとくるようにすること．

(1) 点 C は虚軸上にある

$$\gamma + \overline{\gamma} = 0$$

☆別解 $\mathrm{Re}\,\gamma = 0$

☆別解 $\gamma = ci$ （c は 0 以外の実数）

(2) 点 A は負の実軸上にある

$$\alpha = \overline{\alpha} \text{ かつ } \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} < 0$$

☆別解 $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ かつ $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$

☆別解 $\alpha = c$ （$c < 0$）

(3) BC $\geqq 1$

$$|\gamma - \beta| \geqq 1$$

☆別解 $|\beta - \gamma| \geqq 1$

☆別解 $(\gamma - \beta)\left(\overline{\gamma} - \overline{\beta}\right) \geqq 1$

(4) OA $=$ BC

$$|\alpha| = |\gamma - \beta|$$

☆別解 $|\alpha| = |\beta - \gamma|$

☆別解 $\alpha\overline{\alpha} = (\gamma - \beta)\left(\overline{\gamma} - \overline{\beta}\right)$

(5) ∠ AOB が 60°

$$\arg\frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{\pi}{3}$$

☆別解 $\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \pm\dfrac{\pi}{3}$

☆別解 $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}c$ （c は 0 以外の実数）

☆別解 $\mathrm{Re}\,\dfrac{\beta}{\alpha} = 0$

☆つまり，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ が純虚数ということ．

複素数のかけ算が回転移動を表すので，

割り算でどれくらい回転したかがわかる．

(6) ∠ ACB が鋭角

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} < \frac{\pi}{2}$$

☆別解 $-\dfrac{\pi}{2} < \arg\dfrac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} < \dfrac{\pi}{2}$

☆別解 $\mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} > 0$

☆別解 $\mathrm{Re}\,\dfrac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} > 0$