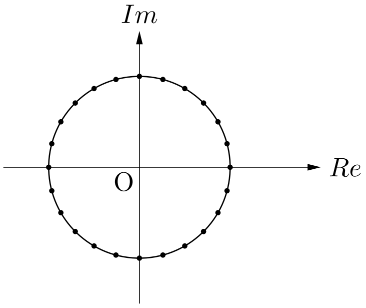
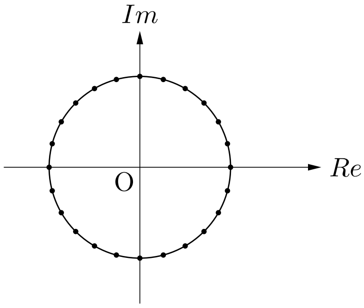
反射テスト　複素平面　$z^n = 1$ とド・モアブルの定理　01

1.　次の方程式を z について解き，その解 z を複素平面上に図示せよ．ただし図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は $\frac{\pi}{12}$ ($15°$) とする．
（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1)　$z^4 = 1$



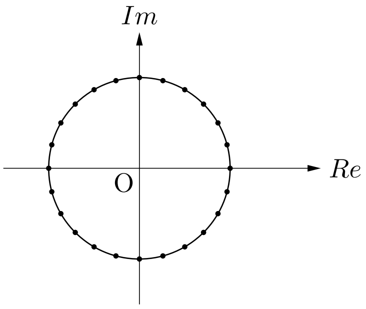
(2)　$z^3 = 1$



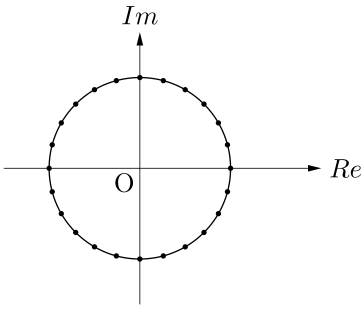
2.　方程式 $z^8 = 1$ の解が複素平面上で正八角形を作ることを用いて，この方程式の解 z を極形式で全て求めよ．
（ S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 6 分，C 級 10 分 ）

3.　次の方程式を z について解き，その解 z を複素平面上に図示せよ．ただし図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は $\frac{\pi}{12}$ (15°) とする． (S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分)

(1)　$z^2 = 1$



(2)　$z^6 = 1$



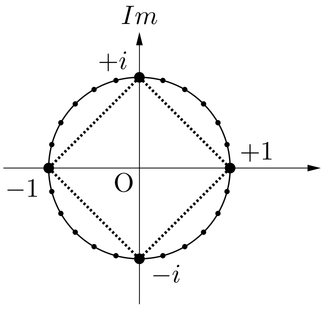
4.　方程式 $z^5 = 1$ の解が複素平面上で正五角形を作ることを用いて，この方程式の解 z を極形式で全て求めよ．
(S 級 50 秒，A 級 3 分，B 級 6 分，C 級 10 分)

反射テスト　複素平面　$z^n = 1$ とド・モアブルの定理　01　解答解説

1.　次の方程式を z について解き，その解 z を複素平面上に図示せよ．ただし図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は $\frac{\pi}{12}$ (15°) とする．　(S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分)

★ $z^n = 1$ (n は自然数) の解は，複素平面上で正多角形を作る．

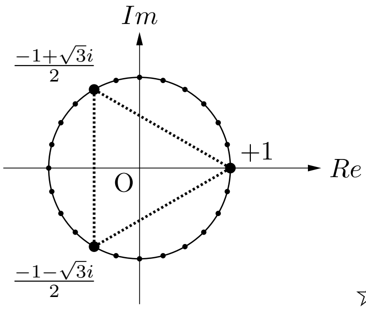
(1)　$z^4 = 1$



☆解が **正四角形** を作る．

$$
\begin{aligned}
& z^4 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (z^4 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{z = \pm 1\ ,\ \pm i}
\end{aligned}
$$

(2)　$z^3 = 1$



☆解が **正三角形** を作る．

$$
\begin{aligned}
& z^3 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & z^3 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{z = 1\ ,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}
\end{aligned}
$$

2.　方程式 $z^8 = 1$ の解が複素平面上で正八角形を作ることを用いて，この方程式の解 z を極形式で全て求めよ．
(S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 6 分，C 級 10 分)

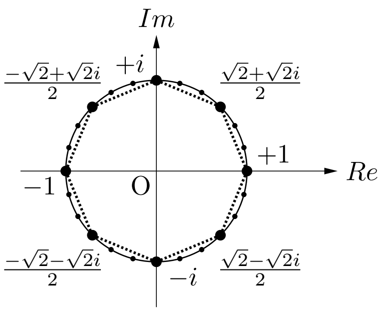
★ ド・モアブルの定理　$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$　(n は整数)
証明は $n \geqq 0$ について数学的帰納法を用いる．さらに負の場合も $n = -m$ として m について数学的帰納法を用いればよい．

★ 極形式による $z^n = 1$ の解　(ただし n は自然数)
ド・モアブルの定理から $z^n = 1$ の 1 つの解は $z = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$．
さらに大きな周期を考えて，$2\pi \times 2, 2\pi \times 3, \cdots$ も n で割っていけば，

$$\boldsymbol{z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (\text{ただし}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)}$$

☆代数学におけるとても重要な公式である．$z^n = 1$ という汎用式を一般的な形で解を示すことができるという点ですばらしい．

★ オイラー表示による解　$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{\frac{2\pi k}{n}i}$　(ただし，$k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$)



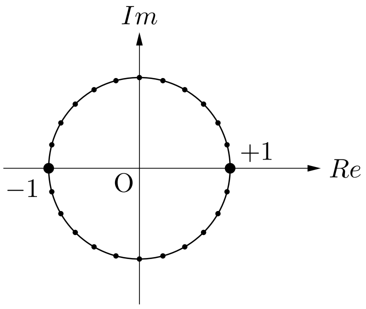
左図にように複素平面上に正八角形を作れば，この各頂点が方程式の解である．
偏角が $\frac{\pi}{4}$ (45°) ずつ増えると考えて，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z} \ =\ & \boldsymbol{\cos 0 + i\sin 0} \quad , \quad \boldsymbol{\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}} \quad , \\
& \boldsymbol{\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{3}{4}\pi} \quad , \\
& \boldsymbol{\cos\pi + i\sin\pi} \quad , \quad \boldsymbol{\cos\tfrac{5}{4}\pi + i\sin\tfrac{5}{4}\pi} \quad , \\
& \boldsymbol{\cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi} \quad , \quad \boldsymbol{\cos\tfrac{7}{4}\pi + i\sin\tfrac{7}{4}\pi} \quad .
\end{aligned}
$$

☆解の偏角が全て $\frac{\pi}{4}$ の整数倍になっていることに注意．

3. 次の方程式を z について解き，その解 z を複素平面上に図示せよ．ただし図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は $\frac{\pi}{12}$ ($15°$) とする．（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1)　$z^2 = 1$

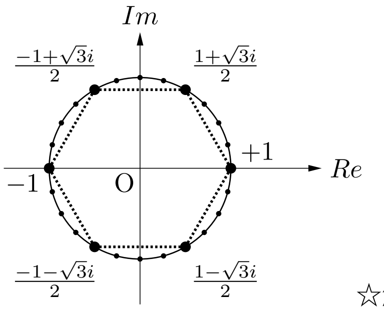


$$z^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{z = \pm 1}$

☆ある意味これは正二角形といえるかもしれない．

(2)　$z^6 = 1$



☆解が **正六角形** を作る．

$$z^6 = 1$$

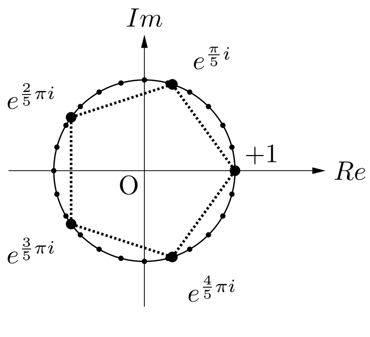
$\Leftrightarrow$　$z^6 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$　$(z^3+1)(z^3-1) = 0$

$\Leftrightarrow$　$(z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{z = \pm 1 \ ,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\ ,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$

4. 方程式 $z^5 = 1$ の解が複素平面上で正五角形を作ることを用いて，この方程式の解 z を極形式で全て求めよ．
（ S 級 50 秒，A 級 3 分，B 級 6 分，C 級 10 分 ）



左図にように複素平面上に正五角形を作れば，この各頂点が方程式の解である．
偏角が $\frac{2\pi}{5}$ ($72°$) ずつ増えると考えて，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} \ &= \ \boldsymbol{\cos 0 + i\sin 0} \quad , \quad \boldsymbol{\cos \tfrac{2}{5}\pi + i\sin \tfrac{2}{5}\pi} \quad , \\ &\quad\ \boldsymbol{\cos \tfrac{4}{5}\pi + i\sin \tfrac{4}{5}\pi} \quad , \quad \boldsymbol{\cos \tfrac{6}{5}\pi + i\sin \tfrac{6}{5}\pi} \quad , \\ &\quad\ \boldsymbol{\cos \tfrac{8}{5}\pi + i\sin \tfrac{8}{5}\pi} \quad . \end{aligned}$$

☆解の偏角が全て $\frac{\pi}{5}$ の整数倍になっていることに注意．

☆以上のように複素平面上での考察から，代数学における「$z^5 = 1$」を解くことと，幾何学における「正五角形の作図」が同じ問題 (同値関係) であることが証明される．