反射テスト　複素平面　オイラーの公式　乗除　01

1.　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で表された複素数の計算をせよ. ただし答えは複素数 $a + bi$ の形（直交形式) で表せ.

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

（1）　$e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

（2）　$e^{\frac{\pi}{2}i} \div e^{\frac{\pi}{3}i}$

（3）　$2\,e^{\frac{5}{3}\pi i} \cdot 3\,e^{\frac{7}{12}\pi i}$

（4）　$6\,e^{\frac{\pi}{3}i} \div 3\,e^{\frac{5}{6}\pi i}$

2. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で表された複素数の計算をせよ. ただし答えは複素数 $a + bi$ の形（直交形式) で表せ.

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

（1） $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}$

（2） $e^{\frac{3}{2}\pi i} \div e^{\frac{7}{6}\pi i}$

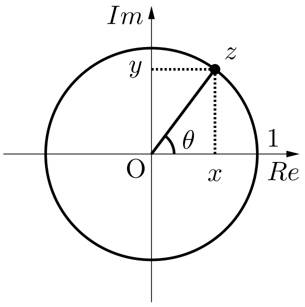
（3） $4\,e^{\frac{11}{12}\pi i} \cdot 3\,e^{\frac{7}{3}\pi i}$

（4） $16\,e^{\frac{\pi}{6}i} \div 2\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$

反射テスト　複素平面　オイラーの公式　乗除　01　解答解説

1.　オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ で表された複素数の計算をせよ．ただし答えは複素数 $a+bi$ の形（直交形式) で表せ．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）



★ オイラー表示と直交形式 ($orthgonal\ form$) による表示

$$\begin{cases} \text{オイラー表示} & \text{複素数を } e^{i\theta} \text{ の形で表すこと．} \\ \text{直交形式 による表示} & \text{複素数を } z=x+yi \text{ 形で表すこと．} \end{cases}$$

★ オイラーの公式 ($Euler's\ formula$)　$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$

単位円周上にある複素数 $z=x+yi$ の x は $\cos\theta$，y は $\sin\theta$ とおけるので，偏角 θ を用いて，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ と表せる．すると複素数の乗除は複素平面上の回転移動と関係するので，積が角度の加減に対応する．積が和と関係するといえば，指数法則である．オイラーはこの公式

$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$ を解析的に発見した．

さらにオイラーはこの公式に $\theta=\pi$ を代入し，

$\boldsymbol{e^{i\pi}=-1}$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{e^{i\pi}+1=0}$　← ★オイラーの等式 ($Euler's\ identity$)

を導いた．数学史上もっとも美しいと言われる式である．ネイピア数 e, 虚数単位 i, 円周率 π という解析, 代数, 幾何における 3 つの重要な定数と，数の基本である 0 と 1 が，こんなシンプルに等式として表せることは奇跡的といえる．

ちなみに $re^{i\theta}$ を $r\angle\theta$ と表すフェーザ形式 ($phasor\ form$) もある．

★ オイラーの公式の乗除

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}} & \text{←☆積の偏角は偏角の和} \\ \boldsymbol{e^{i\alpha}\div e^{i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)}} & \text{←☆商の偏角は偏角の差} \end{cases}$$

(1)　$e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=e^{\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{3}i}$

$=e^{\frac{5}{6}\pi i}$

$=\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi$

$=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$

(2)　$e^{\frac{\pi}{2}i}\div e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=e^{\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{3}i}$

$=e^{\frac{\pi}{6}i}$

$=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$

(3)　$2\,e^{\frac{5}{3}\pi i}\cdot 3\,e^{\frac{7}{12}\pi i}$

$=2\cdot 3\,e^{\frac{5}{3}\pi i+\frac{7}{12}\pi i}$

$=6\,e^{\frac{9}{4}\pi i}$

$=6\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

$=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=6\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\boldsymbol{3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}$

(4)　$6\,e^{\frac{\pi}{3}i}\div 3\,e^{\frac{5}{6}\pi i}$

$=\dfrac{6}{3}\,e^{\frac{\pi}{3}\pi i-\frac{5}{6}\pi i}$

$=2\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=2\,(0-1i)$

$=\boldsymbol{-2i}$

☆ $e^{i\theta}=e^{i(\theta\pm 2\pi)}$

2. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で表された複素数の計算をせよ．ただし答えは複素数 $a + bi$ の形（直交形式）で表せ．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1) $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{\frac{5}{6}\pi i}$

$= e^{\frac{\pi}{2}i + \frac{5}{6}\pi i}$

$= e^{\frac{4}{3}\pi i}$

$= \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(2) $e^{\frac{3}{2}\pi i} \div e^{\frac{7}{6}\pi i}$

$= e^{\frac{3}{2}\pi i - \frac{7}{6}\pi i}$

$= e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(3) $4\,e^{\frac{11}{12}\pi i} \cdot 3\,e^{\frac{7}{3}\pi i}$

$= 4 \cdot 3\,e^{\frac{11}{12}\pi i + \frac{7}{3}\pi i}$

$= 12\,e^{\frac{13}{4}\pi i}$

$= 12\,e^{\frac{5}{4}\pi i}$

$= 12\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

$= 12\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \boldsymbol{-6\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i}$

☆ $e^{i\theta} = e^{i(\theta \pm 2\pi)}$

(4) $16\,e^{\frac{\pi}{6}i} \div 2\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$

$= \dfrac{16}{2}\,e^{\frac{\pi}{6}i - \frac{5}{3}\pi i}$

$= 8\,e^{-\frac{3}{2}\pi i}$

$= 8\left\{\cos\left(-\dfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(-\dfrac{3}{2}\pi\right)\right\}$

$= 8\,(0 + 1i)$

$= \boldsymbol{8i}$