反射テスト　複素平面　オイラー表示　01

1.　次の複素数をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてオイラー表示で表せ.

（ S 級 1 分 30 秒、A 級 2 分 40 秒、B 級 4 分、C 級 6 分 ）

（1）　$z = i$

（2）　$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

（3）　$z = 1 + i$

（4）　$z = \sqrt{3} + i$

（5）　$z = \sqrt{3} - 3i$

（6）　$z = -5 - 5i$

2.　次の複素数をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてオイラー表示で表せ.

（ S 級 1 分 20 秒、A 級 2 分 30 秒、B 級 4 分、C 級 6 分 ）

(1)　$z = -i$

(2)　$z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(3)　$z = 2 + 2i$

(4)　$z = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$

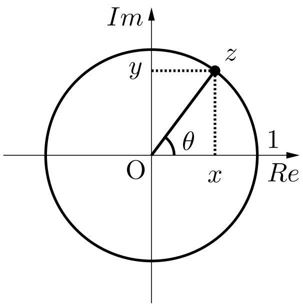
(5)　$z = -3 + \sqrt{3}i$

(6)　$z = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

反射テスト　複素平面　オイラー表示　01　解答解説

1.　次の複素数をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてオイラー表示 $\left(e^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ.

（ S 級 1 分 30 秒、A 級 2 分 40 秒、B 級 4 分、C 級 6 分 ）



★ オイラー表示と直交形式による表示

$\begin{cases} \text{オイラー表示　　　　複素数を } e^{i\theta} \text{ の形で表すこと.} \\ \text{直交形式による表示　複素数を } z = x + yi \text{ 形で表すこと.} \end{cases}$

★ オイラーの公式 (***Euler's formula***)　$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

単位円周上にある複素数 $z = x + yi$ の x は $\cos\theta$, y は $\sin\theta$ とおけるので, 偏角 θ を用いて, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ と表せる. すると複素数の乗除は複素平面上の回転移動と関係するので, 積が角度の加減に対応する. 積が和と関係するといえば, 指数法則である. オイラーはこの公式

$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ を解析的に発見した.

さらにオイラーはこの公式に $\theta = \pi$ を代入し,

$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$　← ★オイラーの等式 (***Euler's identity***)

を導いた. 数学史上もっとも美しいと言われる式である. ネイピア数 e, 虚数単位 i, 円周率 π という解析, 代数, 幾何における 3 つの重要な定数と, 数の基本である 0 と 1 が, こんなシンプルに等式として表せることは奇跡的といえる.

ちなみに $re^{i\theta}$ を $r\angle\theta$ と表すフェーザ形式 (*phasor form*) もある.

(1)　$z = i$

$= \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$= \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{2}i}}$

(2)　$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$= \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{4}i}}$

(3)　$z = 1 + i$

$= \sqrt{1^2 + 1^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \boldsymbol{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}$

☆三角関数の合成のイメージで複素数の絶対値を求める.

(4)　$z = \sqrt{3} + i$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \boldsymbol{2\,e^{\frac{\pi}{6}i}}$

(5)　$z = \sqrt{3} - 3i$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \dfrac{-3}{2\sqrt{3}}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{-\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi + i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$= \boldsymbol{2\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{3}\pi i}} \quad \left(= \boldsymbol{2\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{3}i}}\right)$

☆別解　$z = -2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \boldsymbol{-2\sqrt{3}\,e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \boldsymbol{-2\sqrt{3}\,e^{-\frac{4}{3}\pi i}}$

(6)　$z = -5 - 5i$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}\left(\dfrac{-5}{5\sqrt{2}} + \dfrac{-5}{5\sqrt{2}}i\right)$

$= 5\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

$= \boldsymbol{5\sqrt{2}\,e^{\frac{5}{4}\pi i}} \quad \left(= \boldsymbol{5\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}}\right)$

☆他の別解　$z = -5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \boldsymbol{-5\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}$

2. 次の複素数をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてオイラー表示で表せ.

（ S 級 1 分 20 秒、A 級 2 分 30 秒、B 級 4 分、C 級 6 分 ）

(1) $z = -i$

$$= \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

$$= \boldsymbol{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$$

☆別解 $z = \boldsymbol{-e^{\frac{\pi}{2}i}}$

(2) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \boldsymbol{e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

(3) $z = 2 + 2i$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

(4) $z = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}i\right)$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{5}\,e^{\frac{\pi}{3}i}}$$

☆三角関数の合成のイメージで複素数の絶対値を求める.

(5) $z = -3 + \sqrt{3}i$

$$= \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \boldsymbol{2\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{6}\pi i}}$$

☆別解 $z = -2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$$= \boldsymbol{-2\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi}{6}i}} = \boldsymbol{-2\sqrt{3}\,e^{\frac{11}{6}\pi i}}$$

(6) $z = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{6}\,e^{\frac{5}{4}\pi i}} \quad \left(= \boldsymbol{\sqrt{6}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}}\right)$$

☆他の別解 $z = -\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \boldsymbol{-\sqrt{6}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}$