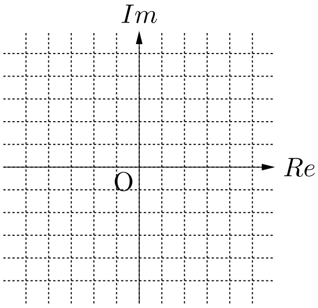
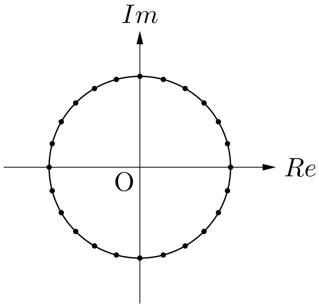
反射テスト　複素平面　乗除と回転移動　01

1.　α, β, γ を複素平面上に図示せよ．ただし (2) の図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は 15° とする．（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1)　$\alpha = 1 + i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$

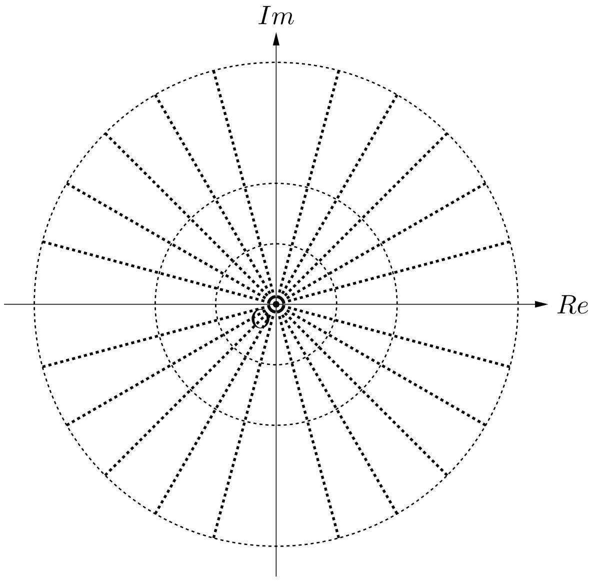


(2)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, $\gamma = \dfrac{1}{\alpha^2}$



2.　偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ．ただし図の小円, 中円, 大円の半径はそれぞれ 1, 2, 4 とし，最小の扇形が作る中心角は 15° とする．（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

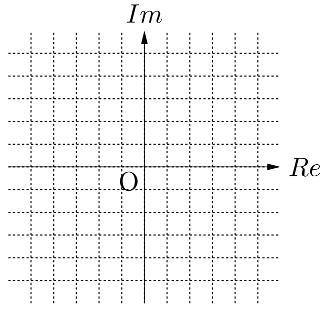
$\alpha = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$, $\beta = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$



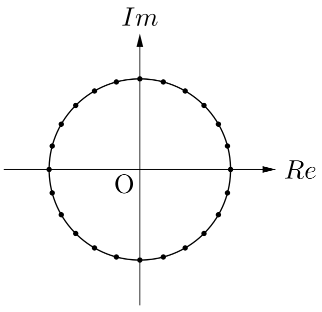
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

3. α, β, γ を複素平面上に図示せよ．ただし (2) の図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は $15°$ とする．
（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1) $\alpha = -1 + i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$

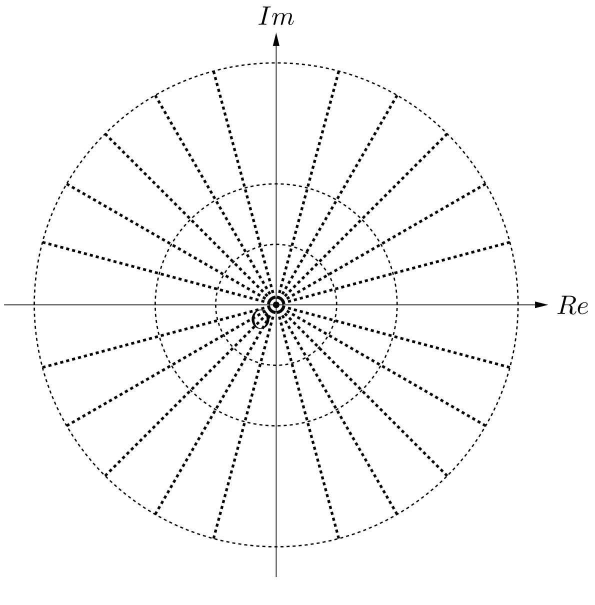


(2) $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, $\gamma = \dfrac{1}{\alpha^2}$



4. 偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ．ただし図の小円, 中円, 大円の半径はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ とし，最小の扇形が作る中心角は $15°$ とする．
（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

$\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 150° + i \sin 150°)$, $\beta = \dfrac{1}{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　複素平面　乗除と回転移動　01　解答解説

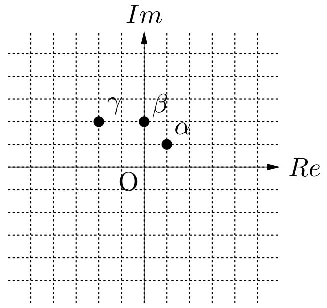
1.　α, β, γ を複素平面上に図示せよ．ただし (2) の図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は 15° とする．　（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

★ 複素数の乗除　（ 除算は逆数の積と考えれば，下の公式にあてはめられる．）

2 つの複素数 z_1, z_2があるとき，$\begin{cases} |\boldsymbol{z_1 \cdot z_2}| = |\boldsymbol{z_1}| \cdot |\boldsymbol{z_2}| & \leftarrow☆積の絶対値は絶対値の積 (☆商は絶対値の商) \\ \arg \boldsymbol{z_1 \cdot z_2} = \arg \boldsymbol{z_1} + \arg \boldsymbol{z_2} & \leftarrow☆積の偏角は偏角の和 (☆商は偏角の差) \end{cases}$

★ 極形式での複素数の乗算　$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

(1)　$\alpha = 1 + i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$



$\beta = (1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$

$\gamma = \beta\alpha = 2i(1+i) = -2 + 2i$

★ 複素数の乗除

複素数の乗除は，絶対値の乗除と回転移動 で説明可能．

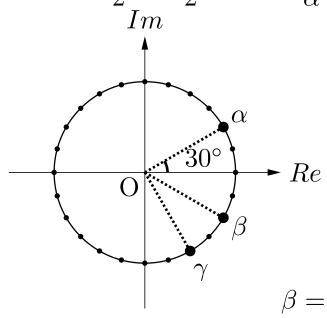
$\alpha = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

$\beta = \alpha^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 (\cos 45° + i\sin 45°)^2$

$= 2(\cos 90° + i\sin 90°)$　←★

☆ 乗算は正の回転移動

(2)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, $\gamma = \dfrac{1}{\alpha^2}$



$\beta = \dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}} = \cos 30° - i\sin 30°$

$= \cos(-30°) + i\sin(-30°)$

$\gamma = \beta^2 = \{\cos(-30°) + i\sin(-30°)\}^2$

$= \left\{\cos^2(-30°) - \sin^2(-30°)\right\}$

$+ i\{2\sin(-30°)\cos(-30°)\}$

$= \cos(-60°) + i\sin(-60°)$　←★

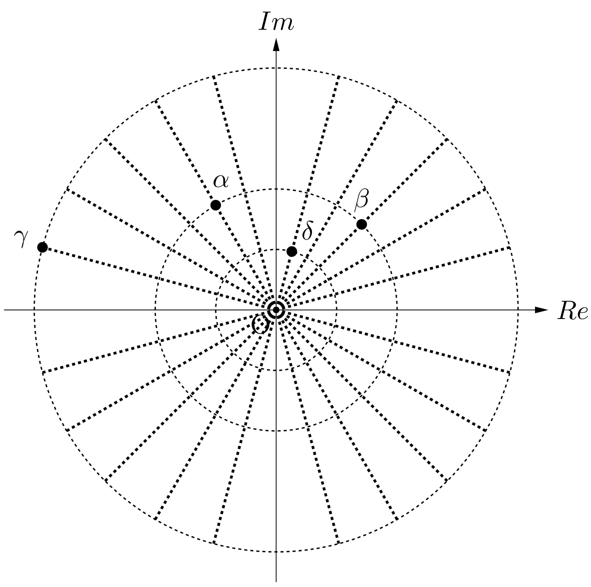
★ 極形式での複素数の除算

$(\cos\alpha + i\sin\alpha) \div (\cos\beta + i\sin\beta)$

$= \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$　←☆除算は負の回転

2.　偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ．ただし図の小円, 中円, 大円の半径はそれぞれ 1, 2, 4 とし，最小の扇形が作る中心角は 15° とする．　（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

$\alpha = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$, $\beta = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$



★複素数の極形式であるから，$\begin{cases} |\alpha| = 2 \ , \ \arg\alpha = 120° \ . \\ |\beta| = 2 \ , \ \arg\beta = 45° \ . \end{cases}$

$\gamma = \alpha\beta = 2^2(\cos 120° + i\sin 120°)(\cos 45° + i\sin 45°)$

$= 4(\cos 120°\cos 45° - \sin 120°\sin 45°)$

$+ i(\sin 120°\cos 45° + \cos 120°\sin 45°)$

$= 4\left\{\cos(120+45)° + i\sin(120+45)°\right\}$　←★

$= 4(\cos 165° + i\sin 165°)$

$\delta = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}} = \dfrac{\alpha\overline{\beta}}{4}$

$= (\cos 120° + i\sin 120°)(\cos 45° - i\sin 45°)$

$= (\cos 120°\cos 45° + \sin 120°\sin 45°)$

$+ i(\sin 120°\cos 45° - \cos 120°\sin 45°)$

$= \cos(120-45)° + i\sin(120-45)°$　←★

$= \cos 75° + i\sin 75°$

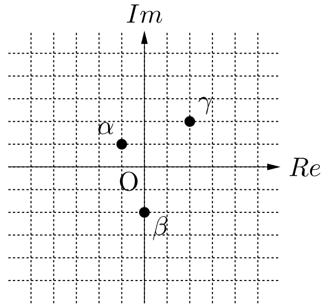
☆絶対値 × 2，÷2．　☆ ± 45 度の回転移動

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

3. α, β, γ を複素平面上に図示せよ．ただし (2) の図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は 15° とする．

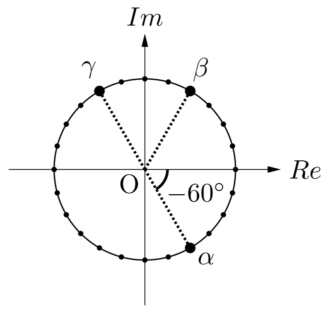
（ S 級 40 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1) $\alpha = -1 + i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$



$\beta = (-1+i)^2 = (-1)^2 - 2i + i^2 = -2i$
$\gamma = \beta\alpha = -2i(-1+i) = 2 + 2i$

(2) $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, $\gamma = \dfrac{1}{\alpha^2}$



$\beta = \dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}} = \cos(-60^\circ) - i\sin(-60^\circ)$
$= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

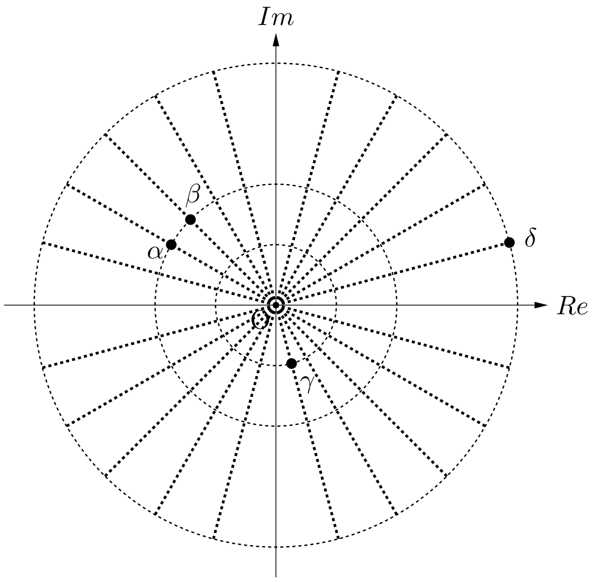
$\gamma = \beta^2 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^2$
$= \left(\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ\right) + i\,(2\sin 60^\circ \cos 60^\circ)$
$= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

☆負の負の回転移動

4. 偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ．ただし図の小円, 中円, 大円の半径はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ とし，最小の扇形が作る中心角は 15° とする．

（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

$\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$, $\beta = \dfrac{1}{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$



★複素数の極形式であるから，$\begin{cases} |\alpha| = \frac{1}{2} & , \quad \arg\alpha = 150^\circ \ . \\ |\beta| = \frac{1}{2} & , \quad \arg\beta = 135^\circ \ . \end{cases}$

$\gamma = \alpha\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
$= \frac{1}{4}(\cos 150^\circ \cos 135^\circ - \sin 150^\circ \sin 135^\circ)$
$\qquad + i\,(\sin 150^\circ \cos 135^\circ + \cos 150^\circ \sin 135^\circ)$
$= \frac{1}{4}\left\{\cos(150+135)^\circ + i \sin(150+135)^\circ\right\}$
$= \frac{1}{4}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

$\delta = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}} = 4\alpha\overline{\beta}$
$= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)(\cos 135^\circ - i \sin 135^\circ)$
$= (\cos 150^\circ \cos 135^\circ + \sin 150^\circ \sin 135^\circ)$
$\qquad + i\,(\sin 150^\circ \cos 135^\circ - \cos 150^\circ \sin 135^\circ)$
$= \cos(150-135)^\circ + i \sin(150-135)^\circ$
$= \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$

☆絶対値 $\times \frac{1}{2}$, $\div \frac{1}{2}$.　☆ ± 135 度の回転移動

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）