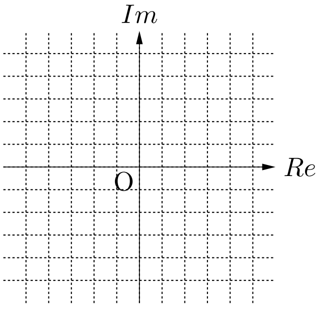
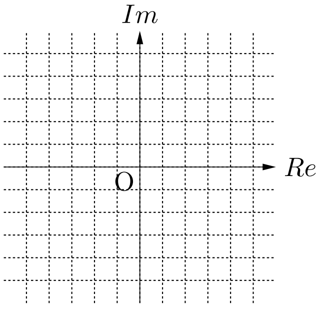
反射テスト　複素平面　加減乗除と複素平面の関係　01

1.　$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ.（ S 級 50 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\alpha = 2 - i$, $\beta = 1 + 3i$, $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \beta - \alpha$

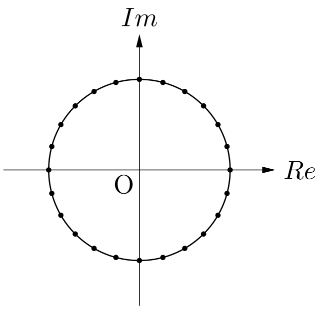


(2)　$\alpha = 3$, $\beta = \alpha i$, $\gamma = \beta i$, $\delta = \gamma i$

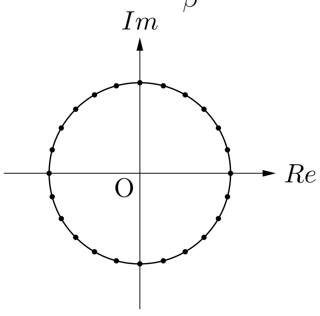


2.　偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ. ただし図の円は半径 1, 周上の点は周を 24 等分していて, 弧 1 つ分が作る中心角は 15° とする.（ S 級 50 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$

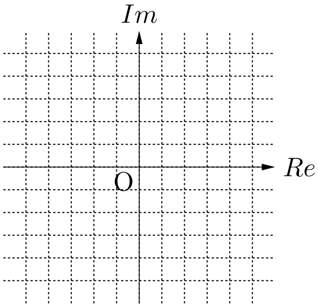


(2)　$\alpha = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$, $\beta = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$

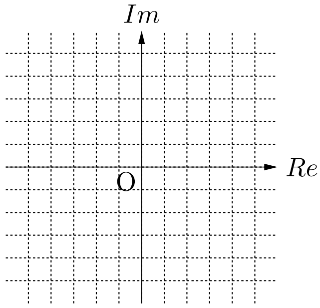


3. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ.（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1) $\alpha = -3 + i$, $\beta = 2 - 4i$, $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \beta - \alpha$

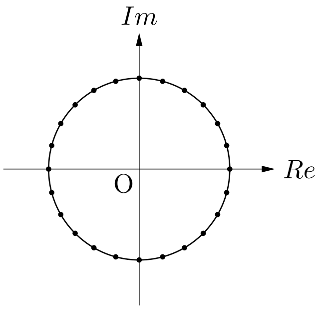


(2) $\alpha = 3 + i$, $\beta = \alpha i$, $\gamma = \beta i$, $\delta = \gamma i$

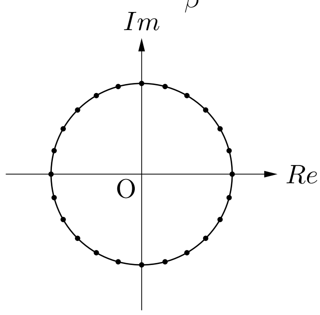


4. 偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ. ただし図の円は半径 1, 周上の点は周を 24 等分していて, 弧 1 つ分が作る中心角は $15°$ とする.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1) $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$



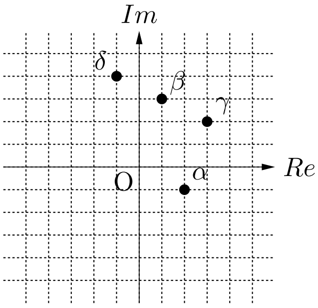
(2) $\alpha = \cos 60° + i \sin 60°$, $\beta = \cos 240° + i \sin 240°$, $\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$



反射テスト　複素平面　加減乗除と複素平面の関係　01　解答解説

1.　$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を複素平面上に図示せよ．(S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 5 分)

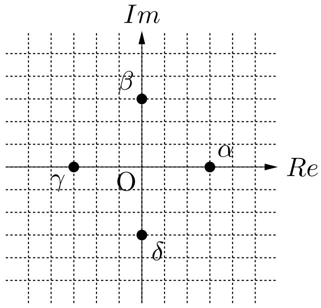
(1)　$\alpha=2-i$, $\beta=1+3i$,
$\gamma=\alpha+\beta$, $\delta=\beta-\alpha$



$\gamma=(2-i)+(1+3i)=3+2i$
$\delta=(1+3i)-(2-i)=-1+4i$

★ 複素数の加減と複素平面 … 平行移動
ベクトルの加減と同じイメージ である．
普通は許されない表現だが，説明のためにあえて書けば，
O,α,γ,β が平行四辺形を作るため，$\overrightarrow{O\gamma}=\overrightarrow{O\alpha}+\overrightarrow{O\beta}$,
また $\overrightarrow{O\delta}=\overrightarrow{\alpha\beta}$ と考えられる．

(2)　$\alpha=3$, $\beta=\alpha i$, $\gamma=\beta i$, $\delta=\gamma i$

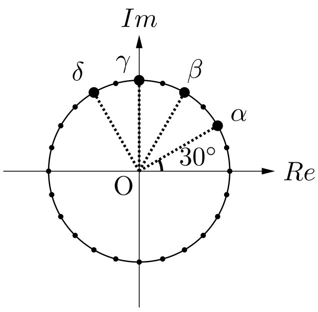


$\beta=3\cdot i=3i$
$\gamma=3i\cdot i=-3$
$\delta=-3\cdot i=-3i$

★ $\times i$ は原点を中心とした $+90$ 度の回転移動．
★ 複素数の乗除と複素平面 … 回転移動と拡大縮小
複素数の乗除は，回転移動と絶対値の乗除 で説明可能．

2.　偏角に忠実に $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を複素平面上に図示せよ．ただし図の円は半径 1，周上の点は周を 24 等分していて，弧 1 つ分が作る中心角は 15° とする．　(S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 5 分)

(1)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $\beta=\alpha^2$, $\gamma=\alpha^3$, $\delta=\alpha^4$



$$|\alpha|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1\ ,\ \arg\alpha=30^\circ$$

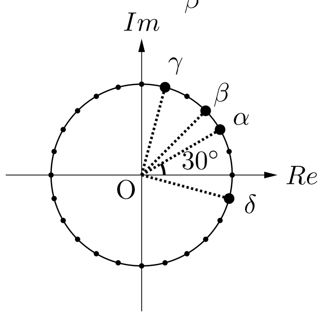
$$\beta=\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\gamma=\alpha^3=\beta\alpha=i$$

$$\delta=\alpha^4=\gamma\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

★ $+30$ 度の回転移動

(2)　$\alpha=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$, $\beta=\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$,
$\gamma=\alpha\beta$, $\delta=\dfrac{\alpha}{\beta}$



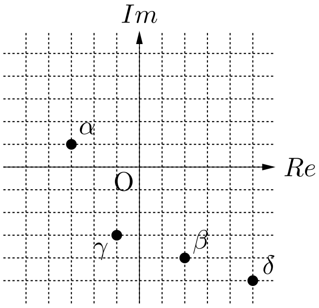
$$\begin{aligned}\gamma&=(\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ)\\&\qquad+i\,(\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ)\\&=\cos(30^\circ+45^\circ)+i\sin(30^\circ+45^\circ)\\&=\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\quad\leftarrow☆\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}}=(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ)\\&=(\cos 30^\circ\cos 45^\circ+\sin 30^\circ\sin 45^\circ)\\&\qquad+i\,(\sin 30^\circ\cos 45^\circ-\cos 30^\circ\sin 45^\circ)\\&==\cos(30^\circ-45^\circ)+i\sin(30^\circ-45^\circ)\\&=\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)\quad\leftarrow☆\end{aligned}$$

☆加法定理　⇒　★ $+45$ 度と -45 度の回転移動

3. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ.（ S 級 55 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

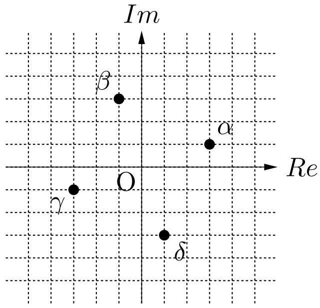
(1) $\alpha = -3 + i$, $\beta = 2 - 4i$,
$\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \beta - \alpha$



$\gamma = (-3 + i) + (2 - 4i) = -1 - 3i$

$\delta = (2 - 4i) - (-3 + i) = 5 - 5i$

(2) $\alpha = 3 + i$, $\beta = \alpha i$, $\gamma = \beta i$, $\delta = \gamma i$



$\beta = (3 + i) \cdot i = -1 + 3i$

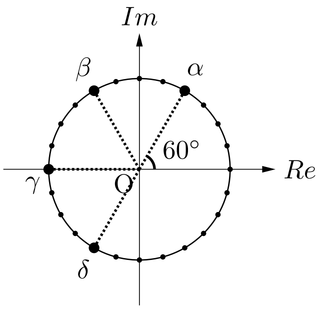
$\gamma = (-1 + 3i) \cdot i = -3 - i$

$\delta = (-3 - i) \cdot i = 1 - 3i$

★ $\times i$ は原点を中心とした $+90$ 度の回転移動.

4. 偏角に忠実に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素平面上に図示せよ. ただし図の円は半径 1, 周上の点は周を 24 等分していて, 弧 1 つ分が作る中心角は $15°$ とする.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1) $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$



$$|\alpha| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ , } \arg\alpha = 60°$$

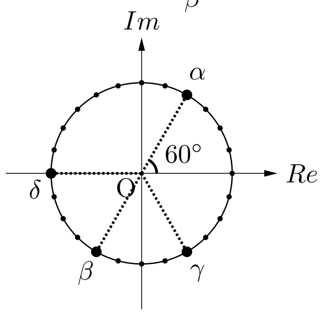
$$\beta = \alpha^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\gamma = \alpha^3 = \beta\alpha = -1$$

$$\delta = \alpha^4 = \gamma\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

★ $+60$ 度の回転移動

(2) $\alpha = \cos 60° + i \sin 60°$, $\beta = \cos 240° + i \sin 240°$,
$\gamma = \alpha\beta$, $\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$



$$\begin{aligned}\gamma &= (\cos 60° \cos 240° - \sin 60° \sin 240°) \\ &\qquad + i\,(\sin 60° \cos 240° + \cos 60° \sin 240°) \\ &= \cos(60° + 240°) + i \sin(60° + 240°) \\ &= \cos 300° + i \sin 300° \quad \leftarrow ☆\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}} = (\cos 60° + i \sin 60°)(\cos 240° - i \sin 240°) \\ &= (\cos 60° \cos 240° + \sin 60° \sin 240°) \\ &\qquad + i\,(\sin 60° \cos 240° - \cos 60° \sin 240°) \\ &== \cos(60° - 240°) + i \sin(60° - 240°) \\ &= \cos(-180°) + i \sin(-180°) \quad \leftarrow ☆\end{aligned}$$

☆加法定理 ⇒ ★ $+240$ 度と -240 度の回転移動