

反射テスト 複素平面 実数と純虚数 01

1. z の共役複素数を \bar{z} とする. 変数は全て複素数であることは既知とする. 次の表現と同値な方程式を, 問の変数とその共役複素数を用いて作れ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) a は実数.

(2) $a + b$ は純虚数.

(3) xy は実数.

(4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ は純虚数.

(5) $x\bar{y}$ は純虚数.

(6) $\frac{i - \bar{b}}{a - b}$ は実数.

2. z の共役複素数を \bar{z} とする. 変数は全て複素数であることは既知とする. 次の表現と同値な方程式を, 問の変数とその共役複素数を用いて作れ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 15 秒、A 級 2 分、B 級 3 分、C 級 4 分)

(1) ab は実数.

(2) $x - y$ は純虚数.

(3) $x\bar{y}i$ は実数.

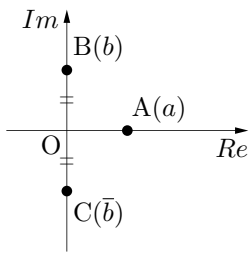
(4) $\frac{1}{a} - \frac{i}{b}$ は実数.

(5) $x\bar{y} + \bar{a}b$ は純虚数.

(6) $\frac{i-a}{\bar{a}-\bar{b}}$ は純虚数.

反射テスト 複素平面 実数と純虚数 01 解答解説

1. z の共役複素数を \bar{z} とする. 変数は全て複素数であることは既知とする. 次の表現と同値な方程式を, 問の変数とその共役複素数を用いて作れ. i は虚数単位とする. (S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)



★ z は実数 (*real number*) $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

★ z は純虚数 (*purely imaginary number*) $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

左図の点 A から, a と a の共役複素数 \bar{a} は一致する.

また, 点 B, C に注目すれば, $b + \bar{b} = 0$ であることもわかる.

共役複素数の計算については, [反射テスト 共役複素数の計算 01](#) を参照.

(1) a は実数.

$$\Leftrightarrow a = \bar{a}$$

(2) $a + b$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow (a + b) + \overline{(a + b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + \bar{a} + \bar{b} = 0$$

(3) xy は実数.

$$\Leftrightarrow xy = \overline{(xy)}$$

$$\Leftrightarrow xy = \bar{x}\bar{y}$$

(4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \overline{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{b}} = 0$$

(5) $x\bar{y}$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow x\bar{y} + \overline{(x\bar{y})} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\bar{y} + \bar{x}y = 0$$

(6) $\frac{i - \bar{b}}{a - b}$ は実数.

$$\Leftrightarrow \frac{i - \bar{b}}{a - b} = \overline{\left(\frac{i - \bar{b}}{a - b}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i - \bar{b}}{a - b} = \frac{-i - b}{\bar{a} - \bar{b}}$$

2. z の共役複素数を \bar{z} とする. 変数は全て複素数であることは既知とする. 次の表現と同値な方程式を, 問の変数とその共役複素数を用いて作れ. i は虚数単位とする.
(S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) ab は実数.

$$\Leftrightarrow ab = \overline{(ab)}$$

$$\Leftrightarrow ab = \bar{a}\bar{b}$$

(2) $x - y$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow (x - y) + \overline{(x - y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + \bar{x} - \bar{y} = 0$$

(3) $x\bar{y}i$ は実数.

$$\Leftrightarrow x\bar{y}i = \overline{(x\bar{y}i)}$$

$$\Leftrightarrow x\bar{y}i = \bar{x}y(-i)$$

$$\Leftrightarrow x\bar{y} + \bar{x}y = 0$$

☆ $x\bar{y}$ が純虚数と同値.

(4) $\frac{1}{a} - \frac{i}{b}$ は実数.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{i}{b}\right) = \overline{\left(\frac{1}{a} - \frac{i}{b}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{i}{b} = \frac{1}{a} + \frac{i}{b}$$

(5) $x\bar{y} + \bar{a}b$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow (x\bar{y} + \bar{a}b) + \overline{(x\bar{y} + \bar{a}b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\bar{y} + \bar{a}b + \bar{x}y + a\bar{b} = 0$$

(6) $\frac{i-a}{\bar{a}-\bar{b}}$ は純虚数.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{i-a}{\bar{a}-\bar{b}}\right) + \overline{\left(\frac{i-a}{\bar{a}-\bar{b}}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{i-a}{\bar{a}-\bar{b}} + \frac{-i-\bar{a}}{a-b} = 0$$