反射テスト　複素平面　絶対値と偏角　01

1. 　複素数 z の絶対値と偏角を求めよ. ただし偏角は 0 以上 2π 未満とし, 単位はラジアンとする.

（ S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分, C 級 2 分 40 秒 ）

(1)　$z = 4$

(2)　$z = -3i$

(3)　$z = 1 + \sqrt{3}i$

(4)　$z = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$

2. 複素数 z の絶対値と偏角を求めよ. ただし偏角は 0 以上 2π 未満とし, 単位はラジアンとする.

(S 級 1 分, A 級 1 分 40 秒, B 級 2 分 20 秒, C 級 3 分)

(1) $z=-8$

(2) $z=5i$

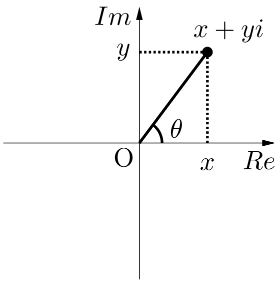
(3) $z=\sqrt{10}-\sqrt{10}i$

(4) $z=2\left(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ\right)$

反射テスト　複素平面　絶対値と偏角　01　解答解説

1.　複素数 z の絶対値と偏角を求めよ．ただし偏角は 0 以上 2π 未満とし，単位はラジアンとする．

（ S 級 45 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 2 分，C 級 2 分 40 秒 ）



複素数 $z = x + yi$ (i は虚数単位，x, y は実数) に対して次のことを定義する．

★ 複素数の絶対値 (大きさ)　$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$

複素数 z の絶対値 (大きさ) を $|z|$ と表す．

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$　($\overline{z}$ は z の共役複素数)

よって，複素平面上の線分 OP の長さ $= |z|$ となる．

★ 複素数の偏角　$\boldsymbol{\arg z = \theta}$

複素数 z の偏角を $\arg z$ と表す．($\angle z$ とすることもある．)

複素数 z の偏角は左上図における θ であり，弧度法,度数法どちらを用いてもよい．

また範囲はその問の指示に従うこと．ここでは範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ としたが，$-180^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ としてもよい．

(1)　$z = 4$

$|z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \mathbf{4}$

z は実軸上にあるから，$\arg z = \mathbf{0}$

★複素平面上の実数

絶対値は実数の絶対値に同じ．

実軸上にあるから，偏角は 0 か π．

(2)　$z = -3i$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \mathbf{3}$

z は虚軸上にあるから，$\arg z = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$

★複素平面上の虚数

虚軸上にあるから，偏角は $\frac{\pi}{2}$ か $\frac{3}{2}\pi$．

(3)　$z = 1 + \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \mathbf{2}$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$x > 0$，$y > 0$ より，$\arg z = \theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

(4)　$z = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$

$|z| = \sqrt{\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ} = \mathbf{1}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ$

$x > 0$，$y < 0$ より，$\arg z = \theta = 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

★ 複素数の極形式　$|z| = r$，$\arg z = \theta$ のとき，

$z = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$　と表せる．

これを複素数の極形式表示という．平面座標における極座標表示と対応する．知っていれば，この問は瞬時に解ける．

2. 複素数 z の絶対値と偏角を求めよ．ただし偏角は 0 以上 2π 未満とし，単位はラジアンとする．

（ S 級 1 分，A 級 1 分 40 秒，B 級 2 分 20 秒，C 級 3 分 ）

(1) $z=-8$

$|z|=\sqrt{(-8)^2+0^2}=\mathbf{8}$

z は実軸上にあるから，$\arg z=\boldsymbol{\pi}$

★複素平面上の実数
絶対値は実数の絶対値に同じ．
実軸上にあるから，偏角は 0 か π．

(2) $z=5i$

$|z|=\sqrt{0^2+5^2}=\mathbf{5}$

z は虚軸上にあるから，$\arg z=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

★複素平面上の虚数
虚軸上にあるから，偏角は $\dfrac{\pi}{2}$ か $\dfrac{3}{2}\pi$.

(3) $z=\sqrt{10}-\sqrt{10}i$

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(-\sqrt{10}\right)^2}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=-1$

$x>0$，$y<0$ より，$\arg z=\theta=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\pi}$

(4) $z=2\left(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ\right)$

★複素数の極形式

$|z|=\mathbf{2}$

$\arg z=\dfrac{165^\circ}{180^\circ}\pi=\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{\pi}$