反射テスト　複素平面　実部と虚部　02

1. i は虚数単位, 複素数 z_n の実部,虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z_n$, $\mathrm{Im}\, z_n$ とする. また z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とする. 次の式を $\mathrm{Re}\, z_n$, $\mathrm{Im} z_n$ で表せ. 必要に応じて, $|\, z_n\,|$ を使ってよい.　（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

(1)　$\mathrm{Re}\, 3z_1$

(2)　$\mathrm{Re}\, iz_1$

(3)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + 1)$

(4)　$\mathrm{Im}\ (z_1 + i)$

(5)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + 3 + 4i)$

(6)　$\mathrm{Im}\ (z_1 + z_2)$

(7)　$\mathrm{Im}\ (2z_1 + iz_2)$

(8)　$\mathrm{Re}\, \overline{z_1}$

(9)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + \overline{z_1})$

(10)　$\mathrm{Re}\, \dfrac{1}{z_1}$

2. i は虚数単位, 複素数 z_n の実部,虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z_n$, $\mathrm{Im}\, z_n$ とする. また z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とする. 次の式を $\mathrm{Re}\, z_n, \mathrm{Im} z_n$ で表せ. 必要に応じて, $|\, z_n\, |$ を使ってよい. （ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 4 分 30 秒 ）

(1) $\mathrm{Im}\,(-5z_1)$

(2) $\mathrm{Im}\, iz_1$

(3) $\mathrm{Im}\,(z_1+1)$

(4) $\mathrm{Im}\,(z_1-i)$

(5) $\mathrm{Im}\,(z_1-4-3i)$

(6) $\mathrm{Re}\,(z_1-z_2)$

(7) $\mathrm{Re}\,(2z_1-3iz_2)$

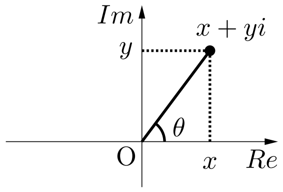
(8) $\mathrm{Im}\,\overline{z_1}$

(9) $\mathrm{Im}\,(z_1+\overline{z_1})$

(10) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z_1}$

反射テスト　複素平面　実部と虚部　02　解答解説

1.　i は虚数単位，複素数 z_n の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z_n$，$\mathrm{Im}\, z_n$ とする．また z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とする．次の式を $\mathrm{Re}\, z_n, \mathrm{Im} z_n$ で表せ．必要に応じて，$|\, z_n\,|$ を使ってよい．（ S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分，C 級 4 分 ）



左図における x が実部，y が虚部である．

★ $\begin{cases} \textbf{複素数 } z \textbf{ の実部 (} \textit{real part} \textbf{)} & \mathbf{Re}\, z \text{ もしくは } \Re z \text{ と表す．} \\ \textbf{複素数 } z \textbf{ の虚部 (} \textit{imaginary part} \textbf{)} & \mathbf{Im}\, z \text{ もしくは } \Im z \text{ と表す．} \end{cases}$

複素数 $z = x + yi$（ i は虚数単位，x, y は実数 ）が与えられれば，$\mathrm{Re}\, z = x$，$\mathrm{Im}\, z = y$ である．

★ 公式

複素数 $z_n = x_n + y_n i$（ i は虚数単位，x_n, y_n は実数 ），z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とすれば，実数 a, b に対して，

① $\mathbf{Re}\, \boldsymbol{az_1} = \mathrm{Re}\,(ax_1 + ay_1 i) = \boldsymbol{a}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1}$

② $\mathbf{Im}\, \boldsymbol{az_1} = \mathrm{Im}\,(ax_1 + ay_1 i) = \boldsymbol{a}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1}$

③ $\mathbf{Re}\, \boldsymbol{biz_1} = \mathrm{Re}\,(bx_1 i - by_1) = \boldsymbol{-b}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1}$

④ $\mathbf{Im}\, \boldsymbol{biz_1} = \mathrm{Im}\,(bx_1 i - by_1) = \boldsymbol{b}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1}$

⑤ $\mathbf{Re}\ \boldsymbol{(az_1 \pm bz_2) = a}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1 \pm b}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_2}$

⑥ $\mathbf{Im}\ \boldsymbol{(az_1 \pm bz_2) = a}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1 \pm b}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_2}$

⑦ $\mathbf{Re}\, \overline{\boldsymbol{z_1}} = \mathbf{Re}\, \boldsymbol{(x_1 - y_1 i) =} \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1}$

⑧ $\mathbf{Im}\, \overline{\boldsymbol{z_1}} = \mathrm{Im}\,(x_1 - y_1 i) = \boldsymbol{-}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z}$

前半をまとめると以下の公式も導ける．実数 a, b に対して，

⑨ $\mathbf{Re}\ \boldsymbol{(a+bi)\, z_1} = a\, \mathrm{Re}\, z_1 + b\, \mathrm{Re}\, iz_2 = \boldsymbol{a}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1 - b}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_2}$

⑩ $\mathbf{Im}\ \boldsymbol{(a+bi)\, z_1} = a\, \mathrm{Im}\, z_1 + b\, \mathrm{Im}\, iz_2 = \boldsymbol{a}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1 + b}\, \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_2}$

(1)　$\mathrm{Re}\, 3z_1$

$= \mathbf{3\, Re}\, \boldsymbol{z_1}$

(2)　$\mathrm{Re}\, iz_1$

$= \boldsymbol{-}\, \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1}$

(3)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + 1)$

$= \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, 1$

$= \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1} + \mathbf{1}$

(4)　$\mathrm{Im}\ (z_1 + i)$

$= \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, i$

$= \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1} + \mathbf{1}$

(5)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + 3 + 4i)$

$= \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\ (3 + 4i)$

$= \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1} + \mathbf{3}$

(6)　$\mathrm{Im}\ (z_1 + z_2)$

$= \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_1} + \mathbf{Im}\, \boldsymbol{z_2}$

(7)　$\mathrm{Im}\ (2z_1 + iz_2)$

$= 2\, \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, iz_2$

$= \mathbf{2\, Im}\, \boldsymbol{z_1} + \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_2}$

(8)　$\mathrm{Re}\, \overline{z_1}$

$= \mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1}$

(9)　$\mathrm{Re}\ (z_1 + \overline{z_1})$

$= \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, \overline{z_1}$

$= \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_1$

$= \mathbf{2\, Re}\, \boldsymbol{z_1}$

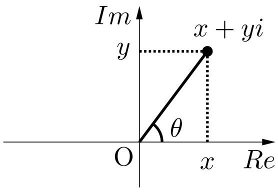
(10)　$\mathrm{Re}\, \dfrac{1}{z_1}$

$= \mathrm{Re}\, \dfrac{z_1}{z_1 \overline{z_1}}$

$= \mathrm{Re}\, \dfrac{z_1}{|\, z_1\,|^2}$

$= \dfrac{\mathbf{Re}\, \boldsymbol{z_1}}{|\, \boldsymbol{z_1}\,|^{\mathbf{2}}}$　　$\leftarrow\ \because\ |\, z_1\,|^2$ は 0 以外の実数

2. i は虚数単位，複素数 z_n の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\,z_n$，$\mathrm{Im}\,z_n$ とする．また z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とする．次の式を $\mathrm{Re}\,z_n$，$\mathrm{Im}z_n$ で表せ．必要に応じて，$|\,z_n\,|$ を使ってよい．　（ S 級 2 分 20 秒，A 級 3 分，B 級 3 分 30 秒，C 級 4 分 30 秒 ）



左図における x が実部，y が虚部である．

★ $\begin{cases} \textbf{複素数 } z \textbf{ の実部 (} \boldsymbol{real\ part} \textbf{)} & \mathbf{Re}\,\boldsymbol{z} \text{ もしくは } \boldsymbol{\Re z} \text{ と表す．} \\ \textbf{複素数 } z \textbf{ の虚部 (} \boldsymbol{imaginary\ part} \textbf{)} & \mathbf{Im}\,\boldsymbol{z} \text{ もしくは } \boldsymbol{\Im z} \text{ と表す．} \end{cases}$

複素数 $z = x + yi$ (i は虚数単位，x, y は実数) が与えられれば，$\mathrm{Re}\,z = x$，$\mathrm{Im}\,z = y$ である．

★ 公式

複素数 $z_n = x_n + y_n i$ (i は虚数単位，x_n, y_n は実数)，z_n の共役複素数を $\overline{z_n}$ とすれば，実数 a, b に対して，

① $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{az_1} = \mathrm{Re}\,(ax_1 + ay_1 i) = \boldsymbol{a}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1}$　② $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{az_1} = \mathrm{Im}\,(ax_1 + ay_1 i) = \boldsymbol{a}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}$

③ $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{biz_1} = \mathrm{Re}\,(bx_1 i - by_1) = \boldsymbol{-b}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}$　④ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{biz_1} = \mathrm{Im}\,(bx_1 i - by_1) = \boldsymbol{b}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1}$

⑤ $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{(az_1 \pm bz_2) = a}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1 \pm b}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_2}$　⑥ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{(az_1 \pm bz_2) = a}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1 \pm b}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_2}$

⑦ $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{\overline{z_1} = }\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{(x_1 - y_1 i) = }\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1}$　⑧ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\overline{z_1}} = \mathrm{Im}\,(x_1 - y_1 i) = \boldsymbol{-}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z}$

前半をまとめると以下の公式も導ける．実数 a, b に対して，

⑨ $\mathbf{Re}\,\boldsymbol{(a + bi)\,z_1} = a\,\mathrm{Re}\,z_1 + b\,\mathrm{Re}\,iz_2 = \boldsymbol{a}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1 - b}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_2}$

⑩ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{(a + bi)\,z_1} = a\,\mathrm{Im}\,z_1 + b\,\mathrm{Im}\,iz_2 = \boldsymbol{a}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1 + b}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_2}$

(1) $\mathrm{Im}\,(-5z_1)$

$= \boldsymbol{-5}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}$

(2) $\mathrm{Im}\,iz_1$

$= \mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1}$

(3) $\mathrm{Im}\,(z_1 + 1)$

$= \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,1$
$= \mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}$

(4) $\mathrm{Im}\,(z_1 - i)$

$= \mathrm{Im}\,z_1 - \mathrm{Im}\,i$
$= \mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1 - 1}$

(5) $\mathrm{Im}\,(z_1 - 4 - 3i)$

$= \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,(-4 - 3i)$
$= \mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1 - 3}$

(6) $\mathrm{Re}\,(z_1 - z_2)$

$= \mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1} - \mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_2}$

(7) $\mathrm{Re}\,(2z_1 - 3iz_2)$

$= 2\,\mathrm{Re}\,z_1 - 3\,\mathrm{Re}\,iz_2$
$= \boldsymbol{2}\,\mathbf{Re}\,\boldsymbol{z_1 + 3}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_2}$

(8) $\mathrm{Im}\,\overline{z_1}$

$= \boldsymbol{-}\,\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}$

(9) $\mathrm{Im}\,(z_1 + \overline{z_1})$

$= \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,\overline{z_1}$
$= \mathrm{Im}\,z_1 - \mathrm{Im}\,z_1$
$= \mathbf{0}$

(10) $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z_1}$

$= \mathrm{Im}\,\dfrac{\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}}$
$= \mathrm{Im}\,\dfrac{\overline{z_1}}{|\,z_1\,|^2}$
$= \dfrac{\mathrm{Im}\,\overline{z_1}}{|\,z_1\,|^2}$　$\leftarrow \because\ |\,z_1\,|^2$ は 0 以外の実数
$= -\dfrac{\mathbf{Im}\,\boldsymbol{z_1}}{|\,\boldsymbol{z_1}\,|^{\mathbf{2}}}$