反射テスト　微分　微分方程式　変数分離形　初期条件あり　01

1.　( ) 内の初期条件のもとで, 次の微分方程式を解け. (S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 8 秒, C 級 12 分)

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = 2 + y$　($x = 0$ のとき $y = 6$)

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x(1+x)}$　($x = 1$ のとき $y = 2$)

2. ( ) 内の初期条件のもとで, 次の微分方程式を解け.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 8 秒, C 級 12 分 ）

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1+y)$ （ $x=0$ のとき $y=1$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{(1-x)(1+x)}$ （ $x=0$ のとき $y=3$ ）

反射テスト　微分　微分方程式　変数分離形　初期条件あり　01　解答解説

1.　( ) 内の初期条件のもとで，次の微分方程式を解け．(S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 8 秒，C 級 12 分)

★ 微分方程式　変数分離形

$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)}$ ($\boldsymbol{g(y) \neq 0}$) の形の微分方程式を変数分離形という．

与方程式　⇔　$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$ と変形して解く．

★ 初期条件　微分方程式に初期条件がある場合，それを用いて定数を決定する．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = 2 + y$　($x = 0$ のとき $y = 6$)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{2+y} &= 1\,dx \\
\int \frac{dy}{2+y} &= \int 1\,dx \\
\log|2+y| &= x + c \qquad (\ c \text{ は定数}\ ) \\
|2+y| &= e^{x+c} \\
2 + y &= Ce^x \qquad \leftarrow☆ \\
y &= Ce^x - 2
\end{aligned}$$

$x = 0$ のとき，$y = C - 2$

初期条件より $y = 6$ であるから，$C = 8$

$\therefore$　$\boldsymbol{y = 8e^x - 2}$

☆ $C = \pm e^c$ とおける．$(C \neq 0)$
$C = 0$ としても，$y = 0$ となり，与方程式を満たす．

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x(1+x)}$　($x = 1$ のとき $y = 2$)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
\log|y| &= \log|x| - \log|1+x| + c \quad (\ c \text{ は定数}\ ) \\
\log|y| &= \log\left(e^c \left|\frac{x}{1+x}\right|\right) \\
y &= C \cdot \frac{x}{1+x} \qquad \leftarrow☆
\end{aligned}$$

$x = 1$ のとき，$y = \dfrac{1}{2}C$

初期条件より $y = 2$ であるから，$C = 4$

$\therefore$　$\boldsymbol{y = \dfrac{4x}{1+x}}$

☆ $C = \pm e^c$ とおける．$(C \neq 0)$
$C = 0$ としても，$y = 0$ となり，与方程式を満たす．

2. ( ) 内の初期条件のもとで，次の微分方程式を解け．(S 級 3 分 30 秒，A 級 5 分，B 級 8 秒，C 級 12 分)

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1+y)$ ($x=0$ のとき $y=1$)

$$\frac{dy}{1+y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int 2x\,dx$$

$$\log|1+y| = x^2 + c \qquad (\ c \text{ は定数}\ )$$

$$|1+y| = e^{x^2+c}$$

$$1+y = Ce^{x^2} \qquad \leftarrow☆$$

$$y = Ce^{x^2} - 1$$

$x=0$ のとき，$y = C-1$

初期条件より $y=1$ であるから，$C=2$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y = 2e^{x^2} - 1}$$

☆ $C = \pm e^c$ とおける．$(C \neq 0)$
$C=0$ としても，$y=0$ となり，与方程式を満たす．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{(1-x)(1+x)}$ ($x=0$ のとき $y=3$)

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}(-\log|1-x| - \log|1+x|) + c$$

(c は定数)

$$\log|y| = \log\left\{e^c\left|\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\right|\right\}$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \qquad \leftarrow☆$$

$x=0$ のとき，$y = C$

初期条件より $y=3$ であるから，$C=3$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{3}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}}$$

☆ $C = \pm e^c$ とおける．$(C \neq 0)$
$C=0$ としても，$y=0$ となり，与方程式を満たす．