

反射テスト 微分 微分方程式 $f(ax + by + c)$ の形 01

1. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$ を解け. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

2. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2x - y - 1$ を解け. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

反射テスト 微分 微分方程式 $f(ax + by + c)$ の形 01 解答解説

1. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$ を解け. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ の形

$ax + by + c = z$ とおくと, 両辺を x で微分することにより, $a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ を得る.

変形して, $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$ とすれば, 変数分離形となり解ける.

$z = x + y + 1$ とおくと, 両辺を x で微分して,

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

また, $\frac{dy}{dx} = z$ であるから,

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z$$

$$\frac{dz}{1+z} = 1 dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int 1 dx$$

$$\log|1+z| = x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$1+z = \pm e^{x+c}$$

$$z = Ce^x - 1 \quad \leftarrow \star$$

$$\therefore x + y + 1 = Ce^x - 1$$

$$\Leftrightarrow y = Ce^x - x - 2 \quad (C \text{ は任意定数})$$

☆ $C = \pm e^c$ とおいた.

2. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2x - y - 1$ を解け。(S級2分, A級3分30秒, B級5分, C級7分)

$z = 2x - y - 1$ とおくと, 両辺を x で微分して,

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

また, $\frac{dy}{dx} = z$ であるから,

$$\frac{dz}{dx} = 2 - z$$

$$\frac{dz}{2-z} = 1 dx$$

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int 1 dx$$

$$-\log|2-z| = x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$2-z = \pm e^{-x-c}$$

$$z = 2 - Ce^{-x} \quad \leftarrow \star$$

$$\therefore 2x - y - 1 = 2 - Ce^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{C}{e^x} + 2x - 3 \quad (C \text{ は任意定数})$$

☆ $C = \pm e^{-c}$ とおいた.

☆置換積分に注意

$$\int \frac{dz}{2-z} = -\log|2-z|$$

負になるのを忘れないように.