反射テスト　微分　微分方程式　同次形　01

1.　次の微分方程式を解け.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$

(2)　$y^2 - xy + x^2 \dfrac{dy}{dx} = 0$

2. 次の微分方程式を解け.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分 ）

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y - x$

(2) $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

反射テスト　微分　微分方程式　同次形　01　解答解説

1.　次の微分方程式を解け.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

★ 微分方程式　同次形　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

$\dfrac{y}{x} = z$ とおくと, $y = xz$ であるから, 両辺を x で微分することにより, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ を得る.
変形して, $x\dfrac{dz}{dx} = f(z) - z$ とすれば, 変数分離形となり解ける.

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$

★同次形

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y = xz$ であるから,

$\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$

これらを上の方程式に代入して,

$$
\begin{aligned}
z + x\frac{dz}{dx} &= 1 + z \\
\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} \\
1\,dz &= \frac{dx}{x} \\
\int 1\,dz &= \int \frac{dx}{x} \\
z &= \log|x| + c \quad (\ c \text{ は定数 })
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \dfrac{y}{x} = \log|x| + c$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{y}{x} = \log|Cx| \quad \leftarrow C = e^c$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = x\log|Cx|}$　（C は任意定数）

☆別解　定数を真数に入れないのであれば,
$y = x\log|x| + cx$　（ c は定数 ）

(2)　$y^2 - xy + x^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

両辺を x^2 で割ると,

$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

よって, ★同次形 である. $z = \dfrac{y}{x}$ とおくと,

$\dfrac{dy}{dx} = z - z^2$

$y = xz$ であるから, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$

これを上の方程式に代入して,

$$
\begin{aligned}
z + x\frac{dz}{dx} &= z - z^2 \\
x\frac{dz}{dx} &= -z^2 \\
-\frac{dz}{z^2}\,dz &= \frac{dx}{x} \\
-\int \frac{dz}{z^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{z} &= \log|x| + c \quad (\ c \text{ は定数 }) \\
\frac{1}{z} &= \log|Cx| \qquad \leftarrow C = e^c
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \dfrac{x}{y} = \log|Cx|$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\log|Cx|}$

$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{y = \dfrac{x}{\log|Cx|}}$　（C は任意定数）

☆別解　定数を真数に入れないのであれば,
$y = \dfrac{x}{\log|x| + c}$　（ c は定数 ）

2. 次の微分方程式を解け.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分 ）

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y - x$

両辺を x で割ると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

よって, ★同次形 である.

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y = xz$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

これらを上の方程式に代入して,

$$\begin{aligned} z + x\frac{dz}{dx} &= z - 1 \\ x\frac{dz}{dx} &= -1 \\ 1\,dz &= -\frac{dx}{x} \\ \int 1\,dz &= -\int \frac{dx}{x} \\ z &= -\log|x| + c \quad (\ c \text{ は定数 }) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x} = -\log|x| + c$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{y}{x} = \log\left|\frac{C}{x}\right| \quad \leftarrow C = e^c$$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{y = x\log\left|\frac{C}{x}\right|} \quad (\,C \text{ は任意定数})$$

☆別解　定数を真数に入れないのであれば,
$y = -x\log|x| + cx$　　（ c は定数 ）

(2) $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

両辺を x^2で割ると,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

よって, ★同次形 である. $z = \dfrac{y}{x}$ とおくと,

$$(1 - z)\frac{dy}{dx} = -z^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{z - 1}$$

$y = xz$ であるから, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$

これを上の方程式に代入して,

$$\begin{aligned} z + x\frac{dz}{dx} &= \frac{z^2}{z-1} \\ x\frac{dz}{dx} &= \frac{z^2 - z(z-1)}{z-1} \\ x\frac{dz}{dx} &= \frac{z}{z-1} \\ \frac{z-1}{z}\,dz &= \frac{dx}{x} \\ \int\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz &= \int\frac{dx}{x} \\ z - \log|z| &= \log|x| + c \qquad (\ C \text{ は定数 }) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x} - \log\left|\frac{y}{x}\right| = \log|x| + c$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{y}{x} = \log\left(\left|\frac{y}{x}\right|\cdot|Cx|\right) \quad \leftarrow C = e^c$$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\frac{y}{x} = \log|Cy|} \quad (\,C \text{ は任意定数})$$

$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x = \frac{y}{\log|Cy|}} \quad (\,C \text{ は任意定数})$$

☆別解　他の表し方もできる.
$y = Ce^{\frac{y}{x}}$ など.