

反射テスト 微分 微分方程式 変数分離形 02

1. 次の微分方程式を解け。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級8分)

(1) $\frac{dy}{dx} = yx^2$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

(3) $\frac{dy}{dx} = e^y$

2. 次の微分方程式を解け. (S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

(1) $\frac{dy}{dx} = ye^x$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2y}$

(3) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

反射テスト 微分 微分方程式 変数分離形 02 解答解説

1. 次の微分方程式を解け。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級8分)

★ 微分方程式 変数分離形

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ ($g(y) \neq 0$) の形の微分方程式を変数分離形という。

与方程式 $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$ と変形して解く。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = yx^2$$

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\log |y| = \frac{1}{3}x^3 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + c}$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$y = C e^{\frac{1}{3}x^3} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y dy = -x dx$$

$$\int y dy = -\int x dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$x^2 + y^2 = 2c$$

$$x^2 + y^2 = C \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = 2c$ とおいた。

☆ $C = \pm e^c$ とおける。($C \neq 0$)

$C = 0$ としても, $y = 0$ となり, 与方程式を満たす。

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int 1 dx$$

$$-e^{-y} = x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$e^{-y} = -x - c$$

$$\log e^{-y} = \log(-x - c)$$

$$-y = \log(C - x) \quad \leftarrow \star$$

$$y = -\log(C - x) \quad (C \text{ は任意定数})$$

☆ $C = -c$ とおいた。

☆ 真数条件から, $x < C$ であるが, 言わなくてよい。

2. 次の微分方程式を解け。(S級2分40秒, A級4分, B級6分, C級8分)

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = ye^x$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2y}$$

$$\frac{dy}{y} = e^x dx$$

$$y dy = \frac{1}{2}(1-x) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$$

$$\int y dy = \frac{1}{2} \int (1-x) dx$$

$$\log |y| = e^x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{4}(1-x)^2 + C \quad (C \text{ は定数})$$

$$|y| = e^{e^x+c}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{e^x}$$

$$y = Ce^{e^x} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = \pm e^c$ とおける. ($C \neq 0$)

$C = 0$ としても, $y = 0$ となり, 与方程式を満たす.

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\log e^{-y} = \log(-e^x - c)$$

$$-y = \log(C - e^x) \quad \leftarrow \star$$

$$y = -\log(C - e^x) \quad (C \text{ は任意定数})$$

☆ $C = -c$ とおいた.