

反射テスト 微分 微分方程式 変数分離形 01

1. 次の微分方程式を解け。(S級2分, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

(1) $\frac{dy}{dx} = x$

(2) $\frac{dy}{dx} = y$

(3) $\frac{dy}{dx} = -y^2$

2. 次の微分方程式を解け. (S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

(1) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(2) $\frac{dy}{dx} = xy$

(3) $\frac{dy}{dx} = -xy^2$

反射テスト 微分 微分方程式 変数分離形 01 解答解説

1. 次の微分方程式を解け。(S級2分, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

★ 微分方程式 変数分離形

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ ($g(y) \neq 0$) の形の微分方程式を変数分離形という。

与方程式 $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$ と変形して解く。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = x$$

$$1 dy = x dx$$

$$\int 1 dy = \int x dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = 1 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 1 dx$$

$$\log |y| = x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$|y| = e^{x+c}$$

$$y = \pm e^c \cdot e^x$$

$$y = Ce^x \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = \pm e^c$ とおける. ($C \neq 0$)

$C = 0$ としても, $y = 0$ となり, 与方程式を満たす.

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -1 dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int 1 dx$$

$$-\frac{1}{y} = -x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y} = x - c$$

$$y = \frac{1}{x + C} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = -c$ とおいた.

☆分母 $\neq 0$ より, $x \neq -C$. ここでは言わなくてよい.

☆余談 英語で答えを書くと,

$$y = \frac{1}{x + C}, \text{ where } C \text{ is an arbitrary constant.}$$

2. 次の微分方程式を解け。(S級2分, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$1 dy = \cos x dx$$

$$\int 1 dy = \int \cos x dx$$

$$y = \sin x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx$$

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = C e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = \pm e^c$ とおける。($C \neq 0$)

$C = 0$ としても, $y = 0$ となり, 与方程式を満たす.

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -x dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 + c \quad (c \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y} = \frac{x^2 - 2c}{2}$$

$$y = \frac{2}{x^2 + C} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \leftarrow \star$$

☆ $C = -2c$ とおいた.