

反射テスト 微分 接線 01

1. 次の関数に対して、「」内で示す点における接線の方程式を求めよ。(S級3分, A級5分30秒, B級8分, C級11分)

(1) $y = e^x$ 「 $x = 0$ 」

(2) $y = \frac{x}{x-1}$ 「 $x = 2$ 」

(3) $y = \sin(2x - \pi)$ 「 $x = \pi$ 」

(4) $y = \log x^3$ 「 $x = 1$ 」

(5) $x^2 + y^2 = 4$ 「 $x = \sqrt{3}, y = 1$ 」

(6) $y = x^x$ 「 $x = 1$ 」

2. 次の関数に対して、「 」内で示す点における接線の方程式を求めよ。(S級4分, A級7分, B級10分, C級14分)

(1) $y = 2^x$ 「 $x = 0$ 」

(2) $y = \frac{3x}{x+1}$ 「 $x = -2$ 」

(3) $y = \cos(\pi - x)$ 「 $x = \pi$ 」

(4) $y = \log x^2$ 「 $x = e^2$ 」

(5) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 「 $x = \sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$ 」

(6) $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 「 $x = 3$ 」

反射テスト 微分 接線 01 解答解説

1. 次の関数に対して、「 」内で示す点における接線の方程式を求めよ。(S級3分, A級5分30秒, B級8分, C級11分)

(1) $y = e^x$ 「 $x = 0$ 」

★ $y = f(x)$ に対する $x = a$ での接線

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y' = (e^x)' = e^x$$

よって、求める接線は、

$$y - e^0 = e^0(x - 0)$$

$$y - 1 = 1 \cdot x$$

$$y = x + 1 \quad \cdots \text{答え}$$

(2) $y = \frac{x}{x-1}$ 「 $x = 2$ 」

★ 商の導関数

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}$$

よって、求める接線は、

$$y - \frac{2}{2-1} = -\frac{1}{(2-1)^2}(x-2)$$

$$y - 2 = -1(x-2)$$

$$y = -x + 4 \quad \cdots \text{答え}$$

(3) $y = \sin(2x - \pi)$ 「 $x = \pi$ 」

$$y' = \cos(2x - \pi) \cdot (2x - \pi)'$$

$$= 2 \cos(2x - \pi)$$

よって、求める接線は、

$$y - \sin(2\pi - \pi) = 2 \cos(2\pi - \pi) \cdot (x - \pi)$$

$$y - \sin \pi = 2 \cos \pi(x - \pi)$$

$$y - 0 = -2(x - \pi)$$

$$y = -2x + 2\pi \quad \cdots \text{答え}$$

(4) $y = \log x^3$ 「 $x = 1$ 」

$$y' = (3 \log x)' = \frac{3}{x}$$

よって、求める接線は、

$$y - \log 1^3 = \frac{3}{1}(x - 1)$$

$$y - 0 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 3 \quad \cdots \text{答え}$$

(5) $x^2 + y^2 = 4$ 「 $x = \sqrt{3}, y = 1$ 」

★ 傾き k , 点 (p, q) を通る直線の式

$$y - q = k(x - p)$$

両辺を x について微分すると、

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

よって、 $x = \sqrt{3}, y = 1$ のときの傾きは、

$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

求める接線は、

$$y - 1 = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

$$y = -\sqrt{3}x + 4 \quad \cdots \text{答え}$$

★ 円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の (p, q) における

接線の方程式は $px + qy = r^2$

これを使えば早い。

(6) $y = x^x$ 「 $x = 1$ 」

両辺の自然対数をとると、

$$\log y = \log x^x$$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{y'}{y} = (x \log x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

$$y' = x^x(\log x + 1)$$

よって、求める接線は、

$$y - 1^1 = 1^1(\log 1 + 1)(x - 1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x \quad \cdots \text{答え}$$

2. 次の関数に対して、「 」内ですす点における接線の方程式を求めよ。(S級4分, A級7分, B級10分, C級14分)

(1) $y = 2^x$ 「 $x = 0$ 」

$$y' = (2^x)' = 2^x \log 2$$

よって、求める接線は、

$$y - 2^0 = 2^0 \cdot \log 2 \cdot (x - 0)$$

$$y - 1 = \log 2 \cdot x$$

$$y = x \log 2 + 1 \quad \dots \text{答え}$$

(2) $y = \frac{3x}{x+1}$ 「 $x = -2$ 」

$$y' = \frac{(3x)'(x+1) - 3x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x + 3 - 3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

よって、求める接線は、

$$y - \frac{3 \cdot (-2)}{-2+1} = \frac{3}{(-2+1)^2} \{x - (-2)\}$$

$$y - 6 = 3(x+2)$$

$$y = 3x + 12 \quad \dots \text{答え}$$

(3) $y = \cos(\pi - x)$ 「 $x = \pi$ 」

$$y' = -\sin(\pi - x) \cdot (\pi - x)'$$

$$= \sin(\pi - x)$$

よって、求める接線は、

$$y - \cos(\pi - \pi) = \sin(\pi - \pi) \cdot (x - \pi)$$

$$y - \cos 0 = \sin 0(x - \pi)$$

$$y - 1 = 0(x - \pi)$$

$$y = 1 \quad \dots \text{答え}$$

(4) $y = \log x^2$ 「 $x = e^2$ 」

$$y' = (2 \log x)' = \frac{2}{x}$$

よって、求める接線は、

$$y - \log(e^2)^2 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2$$

$$y = \frac{2}{e^2}x + 2 \quad \dots \text{答え}$$

(5) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 「 $x = \sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$ 」

★傾き k , 点 (p, q) を通る直線の式
 $y - q = k(x - p)$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{2x}{4} + 2yy' = 0$$

$$x + 4yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

よって、 $x = \sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$ のときの傾きは、

$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

求める接線は、

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3})$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \quad \dots \text{答え}$$

★だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の (p, q) における
 接線の方程式は $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$

(6) $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 「 $x = 3$ 」

☆展開して微分してもよいが、
 対数微分法を用いて次のようにもできる。

両辺の自然対数をとると、

$$\log y = \log x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\log y = \log x + \log(x-1) + \log(x-2) + \log(x-3)$$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

$$y' = (x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-3) + x(x-1)(x-2) \quad \dots \text{①}$$

よって、求める接線の傾きは、
 $x = 3$ を代入して、 $0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
 関数から、接点 $(3, 0)$ となるので、
 求める接線の式は、
 $y - 0 = 6(x - 3)$
 $y = 6x - 18 \quad \dots \text{答え}$

☆厳密に言うと定義域がおかしく 0 での約分もいけないのだが、①は矛盾しない。