

反射テスト 微分 近似値 01

1. 近似値を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

(1) $\sqrt{100.4}$

(2) $\cos 46^\circ$

2. 近似値を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

(1) $\sqrt[3]{64.24}$

(2) $\sin 59^\circ$

反射テスト 微分 近似値 01 解答解説

1. 近似値を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

★1次近似式②

$|h|$ が十分小さいとき $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$

これは「 $x=a$ の近くでは、 $f(x)$ が、1次関数 $f(a) + f'(a)(x-a)$ と値が近い。」という意味でもある。

☆簡易証明

微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ より、 $|h|$ がとても小さいとき、 $f'(a) \doteq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ と考えることができ、変形すれば $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$ となる。

(1) $\sqrt{100.4}$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ とすれば, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

0.4は十分に小さいので、

$$\text{与式} = f(100 + 0.4)$$

$$\doteq f(100) + f'(100) \times 0.4$$

$$= \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \times 0.4$$

$$= 10 + \frac{1}{20} \times \frac{2}{5} = 10 + \frac{1}{50} = 10 + 0.02 = \mathbf{10.02} \quad \dots\text{答え}$$

(2) $\cos 46^\circ$

$$f(x) = \cos x \text{ とすれば, } f'(x) = -\sin x$$

$\frac{\pi}{180}$ は十分に小さいので、

$$\text{与式} = f(45^\circ + 1^\circ)$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\doteq f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{180\sqrt{2}} \quad \dots\text{答え}$$

☆本来はここで $\sqrt{2}$ や π の近似値を代入するが、これでよしとする。

2. 近似値を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

(1) $\sqrt[3]{64.24}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ とすれば, } f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

0.24 は十分に小さいので,

$$\text{与式} = f(64 + 0.24)$$

$$\doteq f(64) + f'(64) \times 0.24$$

$$= \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3} \times (64)^{-\frac{2}{3}} \times 0.24$$

$$= 4 + \frac{1}{3} \times 4^{-2} \times \frac{24}{100}$$

$$= 4 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} \times \frac{24}{100}$$

$$= 4 + \frac{1}{200} = 4 + 0.005 = \mathbf{4.005} \quad \dots\text{答え}$$

(2) $\sin 59^\circ$

$$f(x) = \sin x \text{ とすれば, } f'(x) = \cos x$$

$\frac{\pi}{180}$ は十分に小さいので,

$$\text{与式} = f(60^\circ - 1^\circ)$$

$$= f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\doteq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360} \quad \dots\text{答え}$$