

## 反射テスト 微分 1次近似式 01

1.  $|x|$ が十分小さいとき  $f(x)$  の1次近似式を求めよ。(S級1分30秒, A級2分10秒, B級3分20秒, C級5分)

(1)  $f(x) = x^2 - x - 2$

(2)  $f(x) = e^x$

(3)  $f(x) = \sin x$

(4)  $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2.  $|x|$  が十分小さいとき  $f(x)$  の 1 次近似式を求めよ. ( S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 10 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分 )

(1)  $f(x) = 3 + 2x - x^2$

(2)  $f(x) = \log(1 + x)$

(3)  $f(x) = \cos x$

(4)  $f(x) = \frac{1}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

# 反射テスト 微分 1次近似式 01 解答解説

1.  $|x|$  が十分小さいとき  $f(x)$  の 1 次近似式を求めよ。(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 10 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)

## ★ 1 次近似式①

$|x|$  が十分小さいとき  $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$

これは「 $f(x)$  が  $x=0$  の近くでは、1 次関数  $f(0) + f'(0)x$  と値が近い。」という意味である。言葉を代えれば、どんな複雑な関数でも 1 次関数で近似できるということであり、コンピュータを用いた計算などでとても有意義である。

## ☆簡易証明

微分係数の定義  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  より、 $|h|$  がとても小さいとき、 $f'(0) \doteq \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  と考えることができる。変形すれば、 $f(h) \doteq f(0) + f'(0)h$  であり、 $h$  を  $x$  に置き換えれば 1 次近似式を導くことができる。

$$(1) \quad f(x) = x^2 - x - 2$$

$$(2) \quad f(x) = e^x$$

$$f(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$= -2 - x \quad \dots \text{答え}$$

$$= 1 + x \quad \dots \text{答え}$$

$$(3) \quad f(x) = \sin x$$

$$(4) \quad f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f(0) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$= x \quad \dots \text{答え}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}x \quad \dots \text{答え}$$

2.  $|x|$  が十分小さいとき  $f(x)$  の 1 次近似式を求めよ。(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 10 秒, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)

(1)  $f(x) = 3 + 2x - x^2$

(2)  $f(x) = \log(1 + x)$

$$f(0) = 3 + 2 \times 0 - 0^2 = 3$$

$$f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$= 3 + 2x \quad \dots\text{答え}$$

$$= x \quad \dots\text{答え}$$

(3)  $f(x) = \cos x$

(4)  $f(x) = \frac{1}{\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f(0) = \frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{3}$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$\therefore f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

$$= 1 \quad \dots\text{答え}$$

$$= -\sqrt{3} - 4x \quad \dots\text{答え}$$