反射テスト　微分　色々な微分法　01

1. $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒 ）

(1) $y = (2x+1)^3$

(2) $y = (3x^4 - 5x)^5$

(3) $\begin{aligned} x &= 3t+2 \\ y &= 6t-5 \end{aligned}$

(4) $\begin{aligned} x &= 3-2t \\ y &= 4t^2-1 \end{aligned}$ （ t で表せ. ）

(5) $e^y = x$

(6) $x^2 + y^2 = 1$ （ x, y で表せ. ）

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒 ）

(1) $y = (4x-7)^3$

(2) $y = (1-x^2)^4$

(3) $x = -9t+3$
$y = 6t-1$

(4) $x = 3-t^2$
$y = t^2-4t$ （ t で表せ. ）

(5) $a^y = x$ ただし, a は正の実数.

(6) $\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$ （ x, y で表せ. ）

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　微分　色々な微分法　01　解答解説

1.　$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒 ）

(1)　$y=(2x+1)^3$

★ 合成関数の微分

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

$u=2x+1$ とおくと, $y=u^3$

$\dfrac{dy}{du}=3u^2$

$\dfrac{du}{dx}=2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=3u^2\cdot 2\\&=\boldsymbol{6(2x+1)^2}\end{aligned}$$

(2)　$y=(3x^4-5x)^5$

$u=3x^4-5x$ とおくと, $y=u^5$

$\dfrac{dy}{du}=5u^4$

$\dfrac{du}{dx}=12x^3-5$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=5u^4\cdot(12x^3-5)\\&=\boldsymbol{5(12x^3-5)(3x^4-5x)^4}\end{aligned}$$

(3)　$x=3t+2$

$y=6t-5$

★ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

$\dfrac{dy}{dt}=6$

$\dfrac{dx}{dt}=3$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6}{3}=\boldsymbol{2}$

(4)　$x=3-2t$

$y=4t^2-1$　（ t で表せ. ）

$\dfrac{dy}{dt}=8t$

$\dfrac{dx}{dt}=-2$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8t}{-2}=\boldsymbol{-4t}$

(5)　$e^y=x$

$e^y>0$ であるから, $x>0$.

両辺を x について微分すると,

$e^y\cdot y'=1$　←左辺は合成関数の微分

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{e^y}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{x}\quad(x>0)}\end{aligned}$$

★ 逆関数の微分

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

これを用いて,

$x=e^y\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=e^y$

$\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$

としてもよいが, 解答のほうが応用性に優れる.

(6)　$x^2+y^2=1$　（ x,y で表せ. ）

定義域は $-1\leqq x\leqq 1$

両辺を x について微分すると,

$$\begin{aligned}&2x+2yy'=0\\\Leftrightarrow\ &x+yy'=0\\\Leftrightarrow\ &y'=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 1}$ かつ $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$ において,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}}$$

☆これは xy 平面の **円** の方程式.

よって y' は **円** の接線の傾きである.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒 ）

(1) $y=(4x-7)^3$

★ 合成関数の微分

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

$u=4x-7$ とおくと, $y=u^3$

$$\frac{dy}{du}=3u^2$$
$$\frac{du}{dx}=4$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= 3u^2\cdot 4\\ &= \boldsymbol{12(4x-7)^2}\end{aligned}$$

(2) $y=(1-x^2)^4$

$u=1-x^2$ とおくと, $y=u^4$

$$\frac{dy}{du}=4u^3$$
$$\frac{du}{dx}=-2x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= 4u^3\cdot(-2x)\\ &= \boldsymbol{-8x(1-x^2)^3}\end{aligned}$$

(3) $x=-9t+3$
$y=6t-1$

★ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

$$\frac{dy}{dt}=6$$
$$\frac{dx}{dt}=-9$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{-9}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$$

(4) $x=3-t^2$
$y=t^2-4t$ （ t で表せ. ）

$$\frac{dy}{dt}=2t-4$$
$$\frac{dx}{dt}=-2t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t-4}{-2t}=\boldsymbol{-\frac{t-2}{t}}$$

(5) $a^y=x$ ただし, a は正の実数.

$a^y>0$ であるから, $x>0$.
両辺を x について微分すると,
$a^y\log a\cdot y'=1$ ← 左辺は合成関数の微分.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{a^y\log a}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{x\log a}} \quad \boldsymbol{(x>0)}\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$ （ x, y で表せ. ）

方程式から, $-2\leqq x\leqq 2$.
両辺を x について微分すると,

$$\frac{1}{2}x+2yy'=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x+4yy'=0$$
$$\Leftrightarrow\quad y'=-\frac{x}{4y}$$

$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 2}$ かつ $\boldsymbol{\frac{x^2}{x^2}+y^2=1}$ において,

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}}$$

☆これは xy 平面の **だ円** の方程式.
よって y' は **だ円** の接線の傾きである.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）