

反射テスト 微分 色々な微分法 01

1. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. (S 級 1 分 10 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 3 分, C 級 4 分 30 秒)

(1) $y = (2x + 1)^3$

(2) $y = (3x^4 - 5x)^5$

(3)
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 6t - 5 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4t^2 - 1 \end{cases} \quad (t \text{ で表せ})$$

(5) $e^y = x$

(6) $x^2 + y^2 = 1 \quad (x, y \text{ で表せ})$

2. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分10秒, A級1分50秒, B級3分, C級4分30秒)

(1) $y = (4x - 7)^3$

(2) $y = (1 - x^2)^4$

(3) $\begin{cases} x = -9t + 3 \\ y = 6t - 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t^2 - 4t \end{cases}$ (t で表せ)

(5) $a^y = x$

(6) $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ (x, y で表せ)

反射テスト 微分 色々な微分法 01 解答解説

1. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分10秒, A級1分50秒, B級3分, C級4分30秒)

(1) $y = (2x + 1)^3$

★ 合成関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$u = 2x + 1$ とおくと, $y = u^3$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \cdot 2$$

$$= 6(2x + 1)^2 \quad \dots\text{答え}$$

(2) $y = (3x^4 - 5x)^5$

$u = 3x^4 - 5x$ とおくと, $y = u^5$

$$\frac{dy}{du} = 5u^4$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 5u^4 \cdot (12x^3 - 5)$$

$$= 5(12x^3 - 5)(3x^4 - 5x)^4 \quad \dots\text{答え}$$

(3) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 6t - 5 \end{cases}$

★ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{3} = 2 \quad \dots\text{答え}$$

(4) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4t^2 - 1 \end{cases} \quad (t \text{ で表せ})$

$$\frac{dy}{dt} = 8t$$

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8t}{-2} = -4t \quad \dots\text{答え}$$

(5) $e^y = x$

両辺を x について微分すると,

$$e^y \cdot y' = 1 \quad \leftarrow \text{左辺は合成関数の微分}$$

$$y' = \frac{1}{e^y}$$

$$= \frac{1}{x} \quad \dots\text{答え}$$

★ 逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

これを用いて,

$$x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

としてもよいが, 解答のほうが応用性に優れる.

(6) $x^2 + y^2 = 1 \quad (x, y \text{ で表せ})$

両辺を x について微分すると,

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \dots\text{答え}$$

☆これは xy 平面の 円 の方程式.

よって y' は 円 の接線の傾きである.

2. $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(S級1分10秒, A級1分50秒, B級3分, C級4分30秒)

(1) $y = (4x - 7)^3$

★ 合成関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$u = 4x - 7$ とおくと, $y = u^3$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \cdot 4$$

$$= 12(4x - 7)^2 \quad \dots\text{答え}$$

(2) $y = (1 - x^2)^4$

$u = 1 - x^2$ とおくと, $y = u^4$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \cdot (-2x)$$

$$= -8x(1 - x^2)^3 \quad \dots\text{答え}$$

(3) $\begin{cases} x = -9t + 3 \\ y = 6t - 1 \end{cases}$

★ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

$$\frac{dx}{dt} = -9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \quad \dots\text{答え}$$

(4) $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t^2 - 4t \end{cases} \quad (t \text{ で表せ})$

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 4$$

$$\frac{dx}{dt} = -2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t - 4}{-2t} = -\frac{t - 2}{t} \quad \dots\text{答え}$$

(5) $a^y = x$

両辺を x について微分すると,

$$a^y \log a \cdot y' = 1 \quad \leftarrow \text{左辺は合成関数の微分}$$

$$y' = \frac{1}{a^y \log a}$$

$$= \frac{1}{x \log a} \quad \dots\text{答え}$$

(6) $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1 \quad (x, y \text{ で表せ})$

両辺を x について微分すると,

$$\frac{1}{2}x + 2yy' = 0$$

$$x + 4yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{4y} \quad \dots\text{答え}$$

☆これは xy 平面の **だ円** の方程式.

よって y' は **だ円** の接線の傾きである.